

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Departamento de Física Aplicada III**



**TESIS DOCTORAL**

**Formulación de problemas de difracción electromagnética  
mediante la técnica de rayos y su aplicación al estudio de  
antenas embarcadas**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Mercedes Martínez Burdalo**

**Madrid, 2015**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Física Aplicada III

7P  
1988  
042



x - 53 - 098220 - 9

**FORMULACION DE PROBLEMAS DE  
DIFRACCION ELECTROMAGNETICA  
MEDIANTE LA TECNICA DE RAYOS Y SU  
APLICACION AL ESTUDIO DE  
ANTENAS EMBARCADAS**



Mercedes Martínez Burdalo

Madrid, 1987

**Colección Tesis Doctorales. N.º 45/88**

© Mercedes Martínez Burdalo

Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 - 28015 Madrid  
Madrid, 1988  
Ricoh 3700  
Depósito Legal: M-2163-1988





FORMULACION DE PROBLEMAS DE DIFRACCION ELECTROMAGNETICA  
MEDIANTE LA TECNICA DE RAYOS Y SU APLICACION  
AL ESTUDIO DE ANTENAS EMBARCADAS

MEMORIA PRESENTADA POR:  
MERCEDES MARTINEZ BURDALO

EN LA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS DE LA  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, PARA  
OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS  
FÍSICAS.

DIRECTOR: D. RAIMUNDO VILLAR GOMEZ

MADRID, ENERO, 1987



Quiero agradecer a mi compañero y director de esta tesis, D. Raimundo Villar Gómez, la gran colaboración prestada en la realización de este trabajo. A D. Maximino Rodríguez Vidal y a D. José Luis Sebastián Franco ( ponente de la tesis ) por su siempre mostrado interés en las técnicas numéricas aplicadas al electromagnetismo.

Quiero expresar, además, mi agradecimiento al grupo de antenas del INTA por su ayuda prestada en las comprobaciones experimentales.

Vaya también mi agradecimiento a todas aquellas personas del Instituto de Electrónica de Comunicaciones, especialmente a su director D. Felipe Jiménez Asenjo, que con su amistad o ayuda han permitido realizar este trabajo.





INDICE

	pág.
CAP.I: INTRODUCCION.....	1
CAP.II: METODOS ASINTOTICOS EN ALTA FRECUENCIA.....	2
II.1.- Generalidades sobre los métodos asintóticos.....	4
II.2.- Técnicas de rayos.....	4
II.3.- Métodos de integración de corrientes.....	6
II.3.1.- Aproximación de la óptica física.....	7
IV.3.2.- Teoría física de la difracción.....	9
II.3.3.- Método de las corrientes equivalentes.....	10
CAP.III: TEORIA GEOMETRICA DE LA DIFRACCION.....	13
III.1.- Solución asintótica de las ecuaciones de Maxwell.	14
III.1.1.- Ecuación de ondas a partir de un desarrollo en serie del campo eléctrico.....	14
III.1.2.- Hipótesis de muy alta frecuencia.....	17
III.1.3.- Campo electromagnético en óptica geométrica....	18
III.1.4.- Amplitud del campo a lo largo de un rayo.....	20
III.1.4.1.- Cáusticas y factor de divergencia.....	23
III.1.4.2.- Modificaciones introducidas por la reflexión.	25
III.2.- Teoría geométrica de la difracción de Keller(GTD)	29
III.2.1.- Postulados de Keller sobre la difracción.....	31
III.2.2.- Ley de la difracción en bordes.....	32
III.2.3.- Campo difractado en un borde.....	35
III.2.3.1.- Distancia cáustica.....	37
III.2.3.2.- Matriz de difracción electromagnética en GTD.	42
III.2.3.2.1.- Solución de Sommerfeld.....	43
III.2.3.2.2.- Desarrollo asintótico de Keller.....	46
III.2.3.3.- Coeficiente de difracción de la GTD para el borde de un semiplano conductor.....	50
III.2.3.4.- Coeficientes de difracción para el borde recto de una cuña.....	52
III.2.3.5.- Matriz de difracción electromagnética en la GTD.....	53
CAP.IV: TEORIA GEOMETRICA UNIFORME DE LA DIFRACCION.....	55
IV.1.- Estructuras de la matriz de difracción empleada en	

- II -

la UTD y del campo difractado.....	56
IV.2.- Coeficientes de difracción uniformes para el borde. recto de una cuña de caras planas.....	60
IV.2.1.- Onda plana incidente con polarización eléctrica paralela al borde de una cuña.....	61
IV.2.2.- Expresión integral del campo difractado.....	66
IV.2.3.- Desarrollo asintótico del campo difractado.....	72
IV.2.4.- Coeficientes de difracción $D_s$ para una onda plana que incide normalmente al borde.....	77
IV.2.5.- Coeficiente de difracción $D_h$ para una onda plana que incide normalmente al borde.....	82
IV.2.6.- Coeficientes de difracción para una onda plana con incidencia oblicua al borde de la cuña. Matriz de difracción.....	83
IV.2.7.- Matriz de difracción uniforme para una onda arbi- traria incidente sobre una cuña plana.....	85
IV.3.- Reducción de la solución general UTD de difracción en cuña plana a los casos canónicos.....	90
IV.4.- Condiciones de validez y grado de aproximación de la UTD.....	93
IV.5.- Solución UTD para la difracción en cuña curvada....	95
IV.5.1.- Coeficientes de difracción en borde curvo.....	96
IV.5.1.1.- Difracción en borde curvo cuando una de las superficies es plana.....	99
IV.5.1.2.- Difracción en borde curvo de una superficie....	100
CAP.V: RESOLUCION DE SINGULARIDADES DE LA UTD.....	102
V.1.- Corrientes equivalentes y difracción.....	103
V.1.1.- Deducción de las expresiones de las corrientes equivalentes.....	104
V.2.- Difracción en cuña finita.....	110
V.2.1.- Difracción en vértices.....	112
V.2.1.1.- Coeficientes de difracción en vértice.....	114
V.3.- Cálculo del campo en las cáusticas de rayos difrac- tados.....	116
V.3.1.- Factores de corrección de cáustica.....	119
V.3.1.1.- Factores de corrección cerca de una cúspide de	

- III -

cáusticas.....	121
V.4.- Modificación de la UTD. Difracción con pendiente del campo incidente.....	123
V.4.1.- Derivadas de los coeficientes de difracción.....	124
CAP.VI: APLICACION DE LA TEORIA GEOMETRICA DE LA DIFRACCION	
A LA RADIACION DE ANTENAS EMBARCADAS.....	126
VI.1.- Técnicas de modelización de antenas sobre estruc- turas.....	127
VI.2.- Organización general del programa de cálculo.....	127
VI.2.1.- Modelo radioeléctrico de la antena en el espacio libre.....	129
VI.2.2.- Modelización radioeléctrica del sistema antena- estructura: Trazado de rayos.....	130
VI.2.2.1.- Módulos geométricos para el trazado de rayos.	133
VI.2.2.1.1.- Módulos del punto de reflexion.....	133
VI.2.2.1.2.- Cálculo del punto de difracción en borde...	134
VI.2.2.1.3.- Cálculo de puntos de doble interacción.....	137
VI.2.2.1.4.- Búsqueda de sombras.....	138
VI.2.2.2.- Módulos electromagnéticos.....	139
VI.2.2.2.1.- Cálculo del campo directo.....	140
VI.2.2.2.2.- Cálculo del campo reflejado.....	141
VI.2.2.2.3.- Cálculo del campo difractado en borde.....	142
VI.3.- Aplicación a un caso particular sencillo.....	145
VI.4.- Aplicación a un caso real: satélite HIPPARCOS....	148
VI.4.1.- Estudio de la antena cardioide.....	150
VI.4.1.1.- Trazado de rayos y sus regiones de influencia	152
VI.4.1.2.- Resultados teorico-experimentales sobre mode- lo simplificado.....	156
VI.4.2.- Estudio de la antena inferior. Antena fill-in..	159
VI.4.2.1.- Trazado de rayos y sus regiones de influencia	162
VI.4.2.2.- Estudio teórico experimental.....	166
CONCLUSIONES.....	169
APENDICE AI: TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS ASOCIADAS A FORMU- LAS EMPLEADAS.....	171
APENDICE AII: MODIFICACIONES DEL FRENTE DE ONDAS DE UN RAYO EN LA REFLEXION.....	175

- IV -

APENDICE AIII: ALGUNAS CONSIDERACIONES GEOMETRICAS RELATIVAS	
A PROBLEMAS PLANTEADOS EN ESTE ESTUDIO.....	185
APENDICE AIV : METODO DE LA FASE ESTACIONARIA .....	214
BIBLIOGRAFIA .....	220

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

Cuando se quiere abordar de manera rigurosa un problema de difracción electromagnética en presencia de un obstáculo arbitrario, es sabido que las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento de los campos electromagnéticos son las conocidas ecuaciones de Maxwell sujetas a las condiciones en los límites, las ecuaciones de onda equivalentes, o las ecuaciones integrales[21].

Ahora bien, la solución exacta de las ecuaciones de onda en presencia de obstáculos sólo puede obtenerse con facilidad en ciertos casos denominados canónicos [20]. Además, como veremos en el Capítulo IV, esas soluciones canónicas no convergen para distancias más allá de la longitud de onda. Por otro lado, el conocido método de los momentos [33] que permite tratar superficies de forma arbitraria no es numéricamente efectivo para superficies grandes en términos de longitudes de onda.

Así pues, en alta frecuencia surge la necesidad de utilizar métodos asintóticos en la formulación de los problemas de difracción electromagnética. En el Capítulo II se hace una revisión crítica de dichos métodos. De entre ellos, las técnicas de rayos, que se fundamentan en la óptica de rayos y han sido desarrolladas a través de la teoría geométrica de la difracción en sus diferentes versiones, han despertado un interés creciente con el desarrollo de la tecnología espacial y la necesidad de predecir los diagramas de radiación de las antenas montadas en las complejas estructuras de los vehículos espaciales.

En el Capítulo III se plantea una posible forma de solución

asintótica de las ecuaciones de Maxwell, a partir de la cual se interpreta el campo de óptica geométrica y se plantea la "teoría geométrica de la difracción" de Keller [3].

Sin embargo dicha teoría adopta una representación del campo electromagnético que hace que este sea singular en ciertas situaciones. Para remediar una de estas singularidades, la de los límites de sombra y reflexión, se adopta una representación uniforme a través de dichos límites, que constituye la teoría geométrica uniforme de la difracción, presentada en el Capítulo IV, para bordes rectos en obstáculos conductores ampliada después a bordes curvos.

Existen otras discontinuidades que la anterior teoría geométrica no resuelve, tales como las de cáusticas, proximidades de vértices y otras, que se tratan en el Capítulo V, donde se aportan soluciones nuevas derivadas de una representación integral del campo difractado, fundamentadas en corrientes de línea equivalentes, y en desarrollos asintóticos de segundo orden.

En el Capítulo VI, y haciendo referencia a los desarrollos geométricos incluidos en los Apéndices, se describe la metodología de aplicación de la teoría expuesta a antenas embarcadas, avalando la utilidad de la misma mediante la consideración de un caso real, del que se ha realizado un modelo experimental para comprobar la buena concordancia con los resultados teóricos.

## CAPITULO II

### METODOS ASINTOTICOS EN ALTA FRECUENCIA

En este capítulo se hace una revisión de los principales métodos asintóticos utilizados para resolver problemas de difracción en alta frecuencia.

Sin entrar en detalles matemáticos, haremos una discusión crítica de los mismos: técnicas de rayos, óptica física, teoría física de la difracción y corrientes equivalentes, viendo su validez, ventajas e inconvenientes y comparando soluciones obtenidas mediante estos métodos con soluciones rigurosas en casos donde son fáciles de calcular, haciendo referencia a la bibliografía más interesante.



## II.1.- GENERALIDADES SOBRE LOS METODOS ASINTOTICOS

Los métodos asintóticos de alta frecuencia (longitud de onda pequeña respecto al tamaño del obstáculo), se refieren al estudio de fenómenos de difracción en los que intervienen objetos dispersores "grandes".

Desde el punto de vista matemático son métodos para desarrollar funciones, evaluar integrales y resolver ecuaciones diferenciales, que aumentan su precisión con la frecuencia.

Aunque el problema de difracción no sea planteado inicialmente como una integral, en su desarrollo se desemboca siempre en integrales que han de ser resueltas por un método asintótico.

En las referencias [11] y [17] se aborda una revisión histórica de la bibliografía existente sobre soluciones asintóticas. Dicho tipo de soluciones a los problemas clásicos de difracción han dado lugar a las técnicas asintóticas actualmente utilizadas, las cuales pueden dividirse en dos grupos: técnicas de rayos y métodos integrales que a continuación se describen someramente.

## II.2.- TECNICAS DE RAYOS

Son técnicas asintóticas que se fundamentan en la idea básica de que la energía electromagnética se transporta a lo largo de rayos.

La más antigua de estas técnicas es la óptica geométrica (GO), en la que, como su nombre indica, los campos electromagnéticos siguen los principios de la óptica de rayos [6] y están regidos por el término fundamental de un desarrollo en serie de potencias de la longitud de onda que es solución de las ecuaciones de Maxwell. Dicha solución, para obstáculos conductores, se trata en el Capítulo III.

Para superar algunos de los defectos de la anterior teoría, a la vez que complementarla, Keller [1] y [2], introdujo la teoría geométrica de la difracción (GTD), generalizando el principio de Fermat para un nuevo tipo de rayos: los rayos difractados (Capítulo III).

Sin embargo, dicha teoría, aunque corrige el defecto de la óptica geométrica de no predecir campo alguno en la región de sombra, predice campo infinito en los límites de sombra y reflexión. La solución a este problema fué sugerida por Sommerfeld [8], [15] y consiste en la introducción de funciones especiales en los desarrollos.

Para ello se ingeniaron dos teorías: una de ellas es la teoría asintótica uniforme de Lewis y Boersma [34] (UAT), generalizada por Lee y Deschamps [36], que parte de la idea de modificar el campo de óptica geométrica (incidente y reflejado), de manera que cerca de los límites ópticos se compensen las singularidades del campo difractado de Keller. Otra es la conocida teoría uniforme de la difracción (UTD) de Kouyoumjian y Pathak [19], ampliada por Hwang [37] (MUTD), que serán abordadas en los siguientes capítulos de este trabajo y que modifican el campo difractado de la GTD, de manera que este sea finito en los límites ópticos y que el campo total sea continuo a través de dichos límites.

Aunque todas las teorías geométricas uniformes se reducen a la GTD lejos de los límites ópticos [36], por partir de distintos desarrollos dan lugar a diferentes expresiones cerca de dichos límites. No obstante, como apuntan Mittra y Rahmat-Samii [23], [24], dichas teorías conducen a resultados numéricos muy similares.

Sin embargo, la teoría uniforme que sigue más de cerca el espíritu de la óptica geométrica y, como veremos en los siguientes capítulos, tiene un claro significado físico es la UTD. Esta teoría ha sido establecida no sólo para resolver el problema de difracción en bordes de superficies conductoras [19], [37], sino

también para resolver el problema de difracción en superficies convexas conductoras [38], [39], y en bordes de superficies no perfectamente conductoras [40].

### II.3.- MÉTODOS DE INTEGRACION DE CORRIENTES

Están fundamentados en la representación de los campos electromagnéticos dispersos mediante integrales de las corrientes inducidas sobre el obstáculo [11], [20].

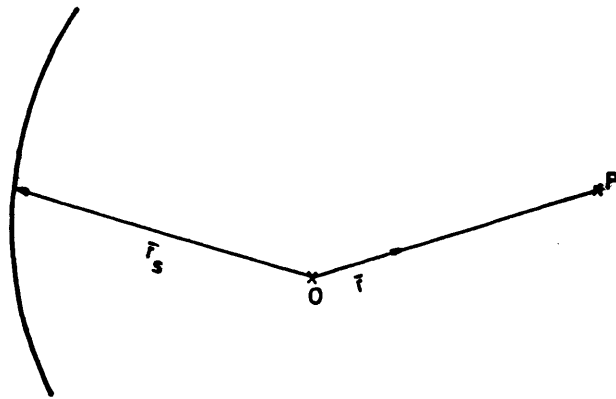


Fig. II.1.- Geometría para la integración de corrientes.

Así pues, el campo electromagnético disperso para una distribución de corriente  $\vec{J}(\vec{r}_s)$  sobre un obstáculo conductor es, en zona lejana [11]:

$$\vec{E}_s = -Z_0 \vec{r} \times \vec{H}_s \quad (2.1)$$

$$\vec{H}_s = \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} (\vec{r} \times \vec{F})$$

siendo  $\vec{F}$  el vector:

$$\vec{F} = \int_S \vec{J}(\vec{r}_s) e^{jk\vec{r} \cdot \vec{r}_s} ds \quad (2.2)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector unitario en la dirección del punto lejano,  $\vec{r}_s$  el vector de posición de un punto genérico de la superficie, (Véase la figura II.1),  $Z_0$  es la impedancia del espacio libre y  $\vec{J}(\vec{r}_s)$  la distribución de corrientes sobre el dispersor.

### II.3.1.- APROXIMACION DE LA OPTICA FISICA

Para calcular la distribución de corrientes sobre el dispersor en alta frecuencia, se suele hacer la aproximación de la óptica física, la cual consiste en suponer que la dispersión en cada punto de la superficie del lado iluminado tiene lugar como si fuese un plano tangente a la superficie en dicho punto. Así, como:

$$\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$$

y la componente tangencial del campo magnético total en una superficie plana es dos veces la componente tangencial del campo incidente, en el lado iluminado:

$$\vec{J} = 2 \vec{n} \times \vec{H}_i$$

y cero en el lado de sombra, siendo  $\vec{H}_i$  el campo incidente y  $\vec{n}$  la normal a la superficie en el punto correspondiente. El uso de dichas corrientes aproximadas en la representación integral del campo electromagnético disperso de (2.1), constituye el método de la óptica física ("Physical Optics", PO).

Como se apunta en [17], la óptica física da una buena aproximación para el cálculo del campo dispersado por grandes obs-

táculos, en situaciones donde no se puede aplicar la óptica geométrica (ni, por supuesto, la GTD), tal como es el caso de las cáusticas de rayos reflejados. Dichas cáusticas ocurren, por ejemplo, en la región de reflexión de ondas planas por superficies también planas, o simplemente curvadas, y en la dirección del haz principal de antenas parabólicas con alimentación focal. Fuera de dichas situaciones la óptica física tiene los siguientes defectos:

- 1) Es un método que, en general, consume mucho tiempo de cálculo, debido a que implica la resolución de una integral de superficie.
- 2) Las corrientes de superficie no contemplan la influencia de la curvatura de los dispersores.
- 3) Dichas corrientes son imprecisas en los bordes, por lo que los campos dispersos deducidos son incorrectos.

Además, como ya apunto Keller [2] y se muestra en [41] y [11], la integral de radiación de (2.1), con la aproximación de la óptica física, puede evaluarse asintóticamente, fuera de las cáusticas, por el método de la fase estacionaria (Apéndice AIV), de manera que el campo disperso conste de dos términos:

$$\vec{E}_s^{PO} = \vec{E}_r + \vec{E}_d^{PO} \quad (2.3)$$

siendo el primero de ellos el campo reflejado de la óptica geométrica y el segundo el campo difractado por borde de la óptica física. Sin embargo, dicho campo difiere de la solución exacta de Sommerfeld, en el caso del semiplano, excepto para dispersión especular [17].

Así pues, fuera de las situaciones indicadas anteriormente, la teoría geométrica de la difracción es una técnica de alta frecuencia más apropiada que la óptica física.

### II.3.2.- TEORIA FISICA DE LA DIFRACCION

En la década de los años 50, a la vez que Keller trataba de mejorar la óptica geométrica ampliando el principio de Fermat, Ufimtsev [42] reconocía que la óptica física era inadecuada en muchas situaciones, particularmente cuando la dirección de dispersión estaba lejos de la especular. Así, postuló la existencia de "corrientes de borde", que debían añadirse a las corrientes de superficie de la óptica física. Sin embargo, Ufimtsev no da las expresiones de esas corrientes adicionales, sino que obtiene los campos difractados correspondientes por medio de un análisis asintótico en alta frecuencia del caso canónico de difracción de onda plana por semiplano conductor.

Ufimtsev descompone el resultado de la evaluación asintótica de la integral de Sommerfeld (capítulo III), de manera diferente a Keller, en tres componentes: el campo incidente, el campo disperso de la óptica física y un campo difractado, siendo este último la diferencia entre el campo difractado de Keller y el que resulta de la evaluación asintótica de la integral de la óptica física [43]. Al método se le conoce con el nombre de método de "teoría física de la difracción" (Physical Theory of Diffraction, PTD). Así pues,

$$\bar{E}_d^{PTD} = \bar{E}_d^K - \bar{E}_d^{PO} \quad (2.4)$$

siendo  $\bar{E}_d^K$  el campo difractado de Keller.

El campo disperso total PTD es:

$$\bar{E}_s^{PTD} = \bar{E}_s^{PO} + \bar{E}_d^{PTD} \quad (2.5)$$

donde el primer término del segundo miembro viene dado por la representación integral de (2.1) con la aproximación de la óptica física de (2.2), y el segundo término es el campo difractado de la teoría física de la difracción, dado en [43].

De este modo, la teoría de Ufimtsev arrastra los inconvenientes de contener la integral de la óptica física como una de las componentes del campo disperso, aunque corregida por una contribución del borde, siendo preferible utilizar exclusivamente una teoría de rayos siempre que sea posible.

### II.3.3.- METODO DE LAS CORRIENTES EQUIVALENTES

El método de las corrientes equivalentes ("equivalent current method", ECM), es una técnica de alta frecuencia consistente en la integración, a lo largo del borde difractante, de corrientes eléctricas y magnéticas ficticias, causantes de la radiación de los campos difractados de la GTD en los puntos de fase estacionaria del borde, siempre que se esté fuera de regiones cóusticas. Dichas corrientes permiten una evaluación numérica de la integral en las regiones cóusticas donde la GTD no es válida.

Así pues, la integral de radiación [20] de corrientes equivalentes,  $I^e$  e  $I^m$ , a lo largo del borde difractante, que dan el campo difractado lejano, se escribe:

$$\bar{E}_d^{ECM} = \frac{jk}{4\pi} \int_c [Z_0 I^e(z) \bar{s} \times (\bar{s} \times \bar{z}) + I^m(z) \bar{s} \times \bar{z}] \frac{e^{-jks}}{s} dz \quad (2.6)$$

siendo  $\bar{z}$  y  $\bar{s}$  vectores unitarios en la dirección de un punto  $\delta$  sobre el borde y del campo lejano, respectivamente (figura V.1).

Las corrientes equivalentes  $I^e$  e  $I^m$  fueron introducidas originalmente por Ryan y Peters [27], con el fin de calcular los campos difractados en cóusticas axiales de cuerpos de revolución.

Estos autores obtuvieron dichas corrientes en el caso de incidencia normal de onda plana en borde de cuña recta, comparando el campo lejano radiado por filamentos de corriente eléctrica o magnética a lo largo del borde [20]:

$$E_z^d = -Z_0 k I^e \frac{e^{j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi ks}} e^{-jks}$$

$$H_z^d = -Y_0 k I^m \frac{e^{j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi ks}} e^{-jks}$$

con el correspondiente campo difractado de la GTD (III.2.3), resultando:

$$I^e = \frac{2j}{Z_0 k} [G(n, \psi_-) - G(n, \psi_+)] E_z^i$$

$$I^m = \frac{2j}{Y_0 k} [G(n, \psi_-) + G(n, \psi_+)] H_z^i$$

(2.7)

estando definida  $\psi_{\pm}$  definida en (3.26), y siendo:

$$G(n, \psi) = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \right)$$

En el caso de borde curvo,  $E_z^i$  (o  $H_z^i$ ) en (2.7) se sustituye por la componente tangencial al borde en el correspondiente punto de difracción. Las expresiones anteriores son válidas únicamente sobre los conos de Keller, e incidencia normal al borde.

Las corrientes equivalentes fueron generalizadas por



Knott y Senior [43] para cualquier ángulo de incidencia y dirección de observación, resultando las expresiones (2.7) divididas por:  $\sin \beta_i \sin \beta_s$ , siendo  $\beta_i$  el ángulo que forma el rayo incidente con la tangente al borde en el punto de difracción, y  $\beta_s$  el ángulo que forma la dirección de observación con dicha tangente.

Sin embargo, en el capítulo IV, con el objetivo de aplicar la integral de línea de (2.6) al cálculo de contribuciones del campo difractado en los vértices de bordes y en las cáusticas de rayos difractados, hacemos una deducción más precisa de dichas corrientes equivalentes, basándonos en la integral de corrientes de superficie de (2.1) y en el concepto de corrientes de franja de Ufimtsev y Mittra [23], [43], que son relacionadas con la solución canónica del problema de difracción en cuña (capítulo IV).

El método de las corrientes equivalentes en la versión de Ryan y Peters, junto con el de óptica física, han constituido, en los últimos años, métodos fundamentales en el tratamiento de las cáusticas de rayos difractados y reflejados, respectivamente, de antenas de reflector [11], [18], como alternativa a la teoría geométrica de la difracción en las situaciones donde la GTD falla.

Así pues, el método de las corrientes equivalentes se aplica dentro del contexto de la GTD, de manera que el campo disperso viene dado por:

$$\vec{E}_s^{ECM} = \vec{E}_r + \vec{E}_d^{ECM}$$

### CAPITULO III

#### TEORIA GEOMETRICA DE LA DIFRACCION

Antes de considerar las aplicaciones concretas de las diferentes teorías geométricas de la difracción, será necesario hacer algunas consideraciones importantes sobre los fundamentos y limitaciones de dichas teorías.

Siguiendo un proceso paralelo al desarrollo histórico de las mismas, se comenzará con la solución asintótica de las ecuaciones de Maxwell para alta frecuencia. Esta solución sitúa el problema en óptica geométrica; es decir, en una teoría de rayos.

En estas condiciones, habrá que completar las elementales leyes de la reflexión con las de Keller sobre los rayos difractados. En este capítulo se deducen los campos electromagnéticos asociados a los rayos incidentes, reflejados y difractados a partir del planteamiento de Keller que se designa con las siglas G.T.D. ("Geometrical Theory of the Diffraction").

### III.1.- SOLUCION ASINTOTICA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Desde que en 1911 Sommerfeld y Runge demostraron que las leyes de la óptica podían deducirse de la ecuación de ondas escalar, se vino manteniendo un interés constante en encontrar soluciones asintóticas de las ecuaciones de Maxwell, que pudieran relacionar los campos vectoriales del electromagnetismo con la óptica de rayos.

Las soluciones utilizadas en cualquier teoría de rayos se obtienen imponiendo condiciones de muy alta frecuencia a las ecuaciones de Maxwell, con lo que se deducirán soluciones asintóticas específicas de dichas ecuaciones.

En este apartado se van a analizar las relaciones entre los principios de la óptica de rayos y las propiedades de una solución asintótica determinada.

Esta solución asintótica se deduce a partir del desarrollo en serie de potencias de la longitud de onda propuesta por Luneburg en 1948 y utilizada posteriormente por Kline, por lo que se denomina desarrollo en serie de Luneburg y Kline.

#### III.1.1.- ECUACION DE ONDAS A PARTIR DE UN DESARROLLO EN SERIE DEL CAMPO ELECTRICO.

Las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo e isótropo, en una región donde no existen fuentes son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

siendo  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  las intensidades del campo eléctrico y magnético respectivamente;  $\epsilon$ , la constante dieléctrica del medio y  $\mu$  su permeabilidad magnética.

La nomenclatura adoptada en este estudio, particularmente en lo referente a los operadores vectoriales, se describe con detalle en el Apéndice AI.

Siguiendo pues esa nomenclatura, que puede considerarse clásica, se deduce el asimismo clásico sistema equivalente a las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$  es el número de ondas en el medio y  $\vec{\nabla}^2$  es el operador equivalente a  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times$ .

Prescindiendo del factor  $e^{j\omega t}$  en el desarrollo en serie de Luneburg y Kline [9], [10], [17], se obtiene:

$$\vec{E}(\vec{R}, \omega) = e^{-jk\psi(\vec{R})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{E}_n(\vec{R})}{(j\omega)^n}\tag{3.2}$$

En esta expresión,  $\vec{R}$  es el vector de posición del punto de observación y  $k\psi(\vec{R})$ , una fase común a todos los términos del desarrollo. Ambos pues se refieren al punto donde se observa el campo y se calculan respecto a un referencial convenientemente elegido según el problema concreto que se desee resolver.

Por otra parte,  $\vec{E}_n(\vec{R})$  es el vector complejo del campo asociado al término  $n$  que decrece con  $(j\omega)^{-n}$ . Obsérvese que cada tér-

mino del desarrollo presenta una fase específica debida a las contribuciones de  $\bar{E}_n(\bar{R})$  y de  $(j\omega)^{-n}$ .

En definitiva, (3.2) supone que el campo

$$\bar{E} = e^{-jkL} \bar{z} \quad (3.3)$$

es el producto del factor fásico:

$$e^{-jkL} ; \quad L = \psi(\bar{R})$$

y del factor vectorial

$$\bar{z} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\bar{E}_n(\bar{R})}{(j\omega)^n}$$

que es independiente de  $k$ .

Si se aplica la condición de divergencia -2ª de (3.1)- a la descomposición factorial (3.3)

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = e^{-jkL} (\bar{\nabla} \cdot \bar{z} - jk \bar{z} \cdot \bar{\nabla} L)$$

se obtiene:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{z} - jk \bar{z} \cdot \bar{\nabla} L = 0 \quad (3.4)$$

Por otra parte, sustituyendo la descomposición factorial (3.3) en la ecuación de ondas -1ª de (3.1)- y haciendo las operaciones convenientes (Apéndice AI), se deduce:

$$\begin{aligned} & k^2 [\bar{z} - (\bar{\nabla} L \cdot \bar{\nabla} L) \bar{z} + \bar{\nabla} L (\bar{\nabla} L \cdot \bar{z})] + \\ & jk [\bar{\nabla} L (\bar{\nabla} \cdot \bar{z}) + \bar{\nabla} (\bar{\nabla} L \cdot \bar{z}) - 2 (\bar{\nabla} L \cdot \bar{\nabla}) \bar{z} - \Delta L \bar{z}] + \\ & [\Delta \bar{z} - \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{z})] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

### III.1.2.- HIPOTESIS DE MUY ALTA FRECUENCIA

Si en el desarrollo en serie (3.2) se desprecian todos los términos correspondientes a  $n > 1$  (hipótesis de muy alta frecuencia) el campo se reduce a:

$$\bar{E} = e^{-jkL} \bar{E}_0(\bar{R})$$

Ahora bien,

$$\bar{z} = \bar{E}_0(\bar{R})$$

es independiente de la frecuencia  $\omega$  y de la constante de propagación  $k$ ; en consecuencia, los factores con paréntesis cuadrados de (3.5) deben ser idénticamente nulos:

$$\bar{E}_0 - (\nabla L \cdot \nabla L) \bar{E}_0 + \nabla L (\nabla L \cdot \bar{E}_0) = 0$$

$$\nabla L (\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_0) + \nabla (\nabla L \cdot \bar{E}_0) - 2(\nabla L \cdot \bar{\nabla}) \bar{E}_0 - \Delta L \bar{E}_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$\Delta \bar{E}_0 - \nabla (\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_0) = 0$$

Por la misma razón de (3.4) se deducen las dos:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$\bar{E}_0 \cdot \nabla L = 0$$

que, impuestas en (3.6) conducen a:

$$|\nabla L|^2 = 1$$

$$2(\nabla L \cdot \bar{\nabla}) \bar{E}_0 + \Delta L \bar{E}_0 = 0 \quad (3.8)$$

$$\Delta \bar{E}_0 = 0$$

Las ecuaciones correspondientes para el campo magnético se pueden encontrar a partir de la ecuación de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (3.9)$$

### III.1.3.- CAMPO ELECTROMAGNETICO EN OPTICA GEOMETRICA

De los resultados anteriores pueden deducirse las siguientes conclusiones de acuerdo con los principios de la Optica geométrica [6], [7]:

- a) De la primera de (3.8) -ecuación eikonal- se deduce que el gradiente es perpendicular a las superficies de fase constante:

$$\psi(\vec{R}) = \text{cte.}$$

En consecuencia, en un medio homogéneo e isótropo, la fase del campo varía a lo largo del gradiente que define una trayectoria denominada rayo, perpendicular a las superficies equifases, llamadas frentes de ondas.

En estas condiciones, tomando un referencial apropiado ligado al rayo, la trayectoria de éste queda localmente relacionada con un escalar  $s$  que sustituye así al vector  $\vec{R}$ . Entonces:

$$\frac{d\psi}{ds} = |\nabla L| = 1$$

y una sencilla integración conduce a:

$$\psi(s) = \psi(0) + s$$

Por consiguiente, la fase en un punto definido por la posición  $s$  vendrá dada por

$$k \psi(s) = k \psi(0) + ks \quad (3.10)$$

b) Por su parte, la segunda expresión de (3.7) indica que el campo  $\bar{E}_0$  es normal a la dirección de propagación y de (3.9) se deduce que  $\bar{E}_0$ ,  $\bar{n}_0$  y  $\nabla L$  forman un triedro trirrectángulo.

En consecuencia, en un punto de coordenada  $s$  respecto a un centro de referencia elegido sobre el rayo, el campo tiene un comportamiento local de onda plana.

c) En cuanto a la segunda ecuación de (3.8), puede demostrarse que

$$\nabla L \cdot \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial s}$$

con lo que aquella se transforma en:

$$\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial s} + \frac{1}{2} \Delta L \cdot \bar{E}_0 = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\bar{E}_0(s) = \bar{E}_0(0) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^s \Delta L ds' \right] \quad (3.11)$$

Por otra parte, puede demostrarse también que la curvatura gaussiana

$$G = 1/R_1 R_2$$

de un frente de onda cuyos radios de curvatura principales son  $R_1$  y  $R_2$  verifica la ecuación diferencial:

$$\frac{dG}{ds} = -G \Delta L$$



que, integrada, conduce a:

$$G(s) = G(0) \exp \left[ - \int_0^s \Delta L ds' \right] \quad (3.12)$$

Comparando (3.11) y (3.12) se deduce la amplitud del campo en s:

$$\bar{E}_0(s) = \bar{E}_0(0) \sqrt{\frac{G(s)}{G(0)}}$$

Finalmente, incorporando la dependencia física se obtiene como expresión completa del campo:

$$\bar{E}(s) = \bar{E}_0(0) \sqrt{\frac{G(s)}{G(0)}} e^{-jk\psi(0)} e^{-jks} \quad (3.13)$$

#### III.1.4.- AMPLITUD DEL CAMPO A LO LARGO DE UN RAYO

La dependencia de la amplitud del campo respecto a la curvatura gaussiana ha sido deducida a partir del siguiente formalismo analítico: la relación de amplitudes en dos puntos s y 0 de la trayectoria de un rayo se puede calcular con la misma integral que determina la relación de curvatura gaussiana en aquellos puntos.

Al mismo resultado puede llegarse a partir de consideraciones energéticas a lo largo de un tubo de rayos estrecho.

En efecto, supóngase un tubo de rayos estrecho (Fig. JII.1) y las dos secciones:  $s'=0$  y  $s'=s$  que determinan en él los dos frentes de onda  $w_0$  y  $w$  definidos por esas coordenadas.

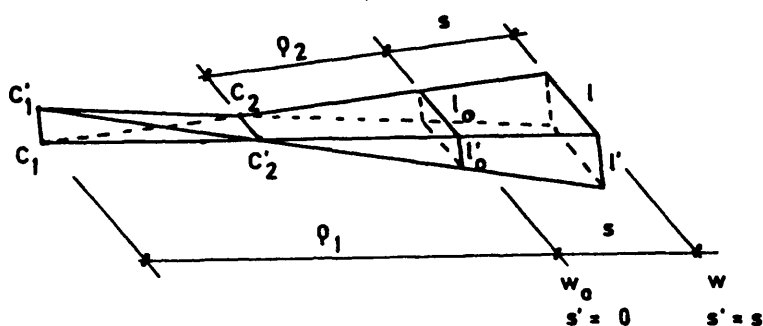


Fig. III.1 - Tubo de rayos estrecho. Pincel de rayos

Si se considera la sección radial que contiene las rectas  $l_0$  y  $l_1$ , dos rayos próximos de dicha sección se cortan en el centro de curvatura  $C_1$  y determinan un rayo de curvatura  $\rho_1$  para el frente de onda  $w_0$  y otro,  $\rho_1 + s$ , para el  $w$ .

Por otra parte, en la otra sección radial -la que contiene a las rectas  $l'_0$  y  $l'_1$ -, dos rayos próximos determinan otro centro de curvatura  $C_2$  con un radio de curvatura  $\rho_2$  para el frente de onda  $w_0$  y otro,  $\rho_2 + s$ , para el  $w$ .

El flujo de energía transportado por los rayos debe mantenerse constante dentro del tubo, de modo que si  $A_0$  y  $A$  son las amplitudes del campo en  $s'=0$  y  $s'=s$  respectivamente, debe verificarse:

$$A_0^2 d\sigma_0 = A^2 d\sigma$$

siendo  $d\sigma_0$  y  $d\sigma$  las superficies determinadas en el tubo de rayos por los citados frentes de ondas.

Ahora bien, dichas áreas, rectángulos elementales, serán proporcionales al producto de sus lados y cada uno de ellos, al radio de curvatura correspondiente; es decir:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_0 &= K^2 l_0 l'_0 = K^2 K'^2 \varrho_1 \varrho_2 \\ d\sigma &= K^2 l l' = K^2 K'^2 (\varrho_1 + s)(\varrho_2 + s) \end{aligned} \right\} \frac{d\sigma_0}{d\sigma} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + s)(\varrho_2 + s)}$$

En consecuencia,

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + s)(\varrho_2 + s)}}$$

Obsérvese que, con las consideraciones hechas en relación con la fig. III.1, las curvaturas gaussianas en  $s'=0$  y  $s'=s$  son respectivamente:

$$G(0) = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} ; \quad G(s) = \frac{1}{(\varrho_1 + s)(\varrho_2 + s)}$$

Por consiguiente, (3.13) se transforma en

$$\bar{E}(s) = \bar{E}_0(0) \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + s)(\varrho_2 + s)}} e^{-jk\psi(0)} e^{-jks}$$

y agrupando la amplitud  $\bar{E}_0(0)$  y la fase  $e^{-jk\psi(0)}$  del campo en el origen:

$$\bar{E}(0) = \bar{E}_0(0) e^{-jk\psi(0)}$$

se obtiene finalmente:

$$\bar{E}(s) = \bar{E}(0) \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + s)(\varrho_2 + s)}} e^{-jks} \quad (3.14)$$

expresión conocida como la del campo en óptica de rayos.

#### III.1.4.1.- Cáusticas y factor de divergencia

De la expresión general del campo asociado a un rayo, (3.14), se deduce que la amplitud del mismo presenta valores singulares para  $s=-\rho_1$  y  $s=-\rho_2$ .

Cada una de dichas condiciones define una situación en la que el campo alcanza valores infinitamente grandes según (3.14) y muy elevados en la realidad. Esta situación corresponde a un lugar geométrico llamado cáustica.

En la figura III.1, la primera cáustica es la indicada por la línea  $C_1C'_1$  y la segunda, por la  $C_2C'_2$ .

En relación con las cáusticas pueden presentarse obviamente tres casos diferentes:

a)  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son finitos. En estas condiciones existen dos líneas cáusticas definidas por  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Su situación, respecto al plano de referencia, dependerá del signo de los radios de curvatura de modo que si uno de los radios de curvatura fuera positivo, la cáustica correspondiente distaría  $|\rho|$ , pero tomada en sentido contrario al de propagación del rayo ( $s=-\rho < 0$ ). Este caso general define un píncel astigmático.

Por otra parte, si el punto de observación dista mucho del referencial, caso de un diagrama de radiación, tanto  $\rho_1$  como  $\rho_2$  son despreciables frente a  $s$  y la amplitud varía con  $s^{-1}$ , caso análogo al de las ondas esféricas.

b)  $\rho_1$  es finito y  $\rho_2$  infinito. En tal caso,

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_2 + s} = 1$$

y la expresión (3.14) se transforma en

$$\bar{E}(s) = \bar{E}(0) \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1 + s}} e^{-jks}$$

donde aparece una sola cáustica en  $s = -\rho_1$ . Si se estudia el campo a gran distancia del plano de referencia, su amplitud variará con  $s^{-\frac{1}{2}}$  como ocurre con las ondas cilíndricas.

c)  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son infinitos. Entonces, (3.14) se reduce a

$$\bar{E}(s) = \bar{E}(0) e^{-jks}$$

donde la amplitud se mantiene constante con  $s$ . Este caso en que no existen cáusticas es el correspondiente a una propagación por ondas planas.

Las distancias  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , cuando son finitas, se llaman distancias cáusticas y la raíz cuadrada de la expresión (3.14) factor de divergencia.

Volviendo de nuevo a (3.14) y suponiendo que se hace variar  $s$  de forma continua, lo que equivale a hacer una prospección a lo largo del rayo, puede observarse que, cuando el rayo cruza una cáustica, el factor  $\rho+s$  correspondiente cambia de signo. Esto equivale a un brusco cambio de fase de  $\pi/2$  debido a la raíz cuadrada que aparece sobre  $\rho+s$ . Entre cáusticas, la variación de fase será debida exclusivamente al factor exponencial y de nuevo, al atravesar la segunda cáustica (en el caso de existir dos), habrá que introducir un segundo salto brusco de  $\pi/2$  en la fase.

Finalmente, la dirección del campo -perpendicular al rayo, se mantiene invariable a lo largo de él, siempre que éste se mantenga en un mismo medio homogéneo e isótropo.

#### III.1.4.2.- Modificaciones introducidas por la reflexión

Las características del rayo comentadas en el párrafo anterior son modificadas cuando dicho rayo se encuentra con un obstáculo.

Las modificaciones dependerán fundamentalmente del fenómeno que se produzca en la interacción rayo-obstáculo. Por el momento, se van a considerar las derivadas de la reflexión del rayo sobre una superficie conductora, dejando para más adelante las producidas por la difracción.

Supongamos pues que un rayo  $\vec{s}^i$  incide en el punto O sobre una superficie curvada  $\Sigma$  (fig. III.2), formando un ángulo de incidencia  $\theta^i$  con la normal  $\vec{n}$  a  $\Sigma$  en el punto O.

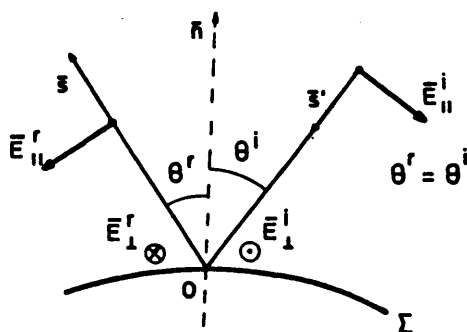


Fig. III.2 - Reflexión sobre una superficie curva  $\Sigma$

Tres aspectos diferentes deben considerarse al tratar la reflexión:

- modificación de la trayectoria de rayo.
- obtención del campo eléctrico asociado al rayo reflejado y
- estudio de la estructura del frente de onda correspon-

diente al rayo reflejado.

a) Modificación de la trayectoria del rayo

Como es sabido, el rayo reflejado  $\bar{s}$  cumple las conocidas leyes de la reflexión que permiten determinar fácilmente su trayectoria. Es conveniente subrayar que un proceso cómodo para determinarla es a partir de la imagen del rayo incidente respecto al plano tangente a  $\Sigma$  en O.

b) Campo eléctrico asociado al rayo reflejado

Según se ha demostrado en III.1.3.b), el campo eléctrico  $\bar{E}_i$ , asociado al rayo incidente en O está contenido en el plano perpendicular al rayo  $\bar{s}'$ . Ahora bien, en relación con el plano de incidencia (éste contiene a los vectores  $\bar{s}'$  y  $\bar{n}$ ), el campo eléctrico tiene dos componentes:  $\bar{E}_n^i$  (contenida en dicho plano) y  $\bar{E}_t^i$  (perpendicular a él).

$$\bar{E}_i = \bar{E}_n^i + \bar{E}_t^i$$

Pero por ser  $\bar{E}_t^i$  perpendicular al plano de incidencia, lo es también al vector  $\bar{n}$  contenido en él; por consiguiente, pertenece al plano tangente a  $\Sigma$  en O y las condiciones de contorno exigen que en dicho punto

$$\bar{E}_t^r + \bar{E}_t^i = 0$$

Por su parte,  $\bar{E}_n^i$  admite asimismo la descomposición

$$\bar{E}_n^i = (\bar{E}_n^i)_N + (\bar{E}_n^i)_T$$

donde la primera es paralela al vector  $\bar{n}$  y, la segunda, tangente a  $\Sigma$ ; en consecuencia:

$$(\bar{E}_{||}^r)_N = (\bar{E}_{||}^i)_N; \quad (\bar{E}_{||}^r)_T + (\bar{E}_{||}^i)_T = 0$$

Es evidente que, en estas condiciones, las componentes  $\bar{E}_{||}^r$  y  $\bar{E}_{\perp}^r$  del campo reflejado

$$\bar{E}_r = \bar{E}_{||}^r + \bar{E}_{\perp}^r$$

tienen las direcciones que aparecen en la figura III.2.

Ahora bien, la disposición relativa de  $\bar{E}_{||}^r$  respecto a  $\bar{s}$  es la misma que la de  $\bar{E}_{||}^i$  respecto a  $\bar{s}'$ ; por el contrario, las de  $\bar{E}_{\perp}^r$  y  $\bar{E}_{\perp}^i$  son opuestas: en consecuencia

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_{||}^r \\ \bar{E}_{\perp}^r \end{pmatrix} = ((R)) \begin{pmatrix} \bar{E}_{||}^i \\ \bar{E}_{\perp}^i \end{pmatrix}$$

en el punto de reflexión, donde la matriz de reflexión es:

$$((R)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Estudio de la estructura del frente de onda correspondiente al rayo reflejado.

El rayo incidente dado por (3.14) lleva asociadas las distancias cáusticas  $\rho_1^i$  y  $\rho_2^i$  que conforman el frente de onda del mismo. Si dicho rayo se refleja en la superficie curva  $\Gamma$  debe producirse lógicamente una modificación del frente de onda y, en consecuencia, las distancias cáusticas  $\rho_1^r$  y  $\rho_2^r$ , asociadas al rayo reflejado deberán ser distintas a las del incidente.



El problema es pues determinar  $\rho_1^r$  y  $\rho_2^r$  en función de las incidentes  $\rho_1^i$  y  $\rho_2^i$  y de los radios de curvatura principales  $R_1$  y  $R_2$  de la superficie reflectora en el punto O.

Deschamps [6] ha demostrado que dichos parámetros vienen dados por:

$$\begin{pmatrix} 1/\rho_1^r \\ 1/\rho_2^r \end{pmatrix} = f_0 + \frac{1}{2} w F_0 \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sqrt{f_1^2 + w f_1 F_1 + w^2 F_2} \quad (3.15)$$

donde las funciones que aparecen en ella quedan definidas en el siguiente cuadro:

$$\begin{aligned} w &= 2 \frac{\cos \theta^i}{|\Omega|^2} \\ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1^i} \pm \frac{1}{\rho_2^i} \right) \\ \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} &= \frac{\Omega_{22}^2 \pm \Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2 \pm \Omega_{11}^2}{R_2} \\ F_2 &= \frac{F_0}{4} - \frac{|\Omega|^2}{R_1 R_2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por otra parte,  $\alpha_{ij}$  son los elementos de la matriz

$$((\Omega)) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^i \cdot \bar{u}_1 & \bar{x}_1^i \cdot \bar{u}_2 \\ \bar{x}_2^i \cdot \bar{u}_1 & \bar{x}_2^i \cdot \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

de proyección del referencial relativo a las direcciones principales  $\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i$  del frente de onda incidente sobre el referencial de direcciones principales  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  ligado a la superficie reflectora  $\Gamma$ .

En el Apéndice AII se describe con mayor detalle la deducción no solo de la fórmula (3.15), sino también, los vectores unitarios de las direcciones principales del frente de onda del rayo reflejado.

Como consecuencia de todo lo dicho en este apartado, y de (3.14), el campo eléctrico asociado al rayo será

$$\begin{pmatrix} E_{||}^r \\ E_{\perp}^r \end{pmatrix} = ((R)) \begin{pmatrix} E_{||}^i \\ E_{\perp}^i \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\varphi_1^r \varphi_2^r}{(\varphi_1^r + s)(\varphi_2^r + s)}} e^{-jks} \quad (3.17)$$

siendo  $\bar{E}_{||}^i$  y  $\bar{E}_{\perp}^i$ ; y  $\bar{E}_{||}^r$  y  $\bar{E}_{\perp}^r$  las componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia en el punto 0 (que se toma como origen,  $s=0$ ), del campo incidente y reflejado, respectivamente.

### III.2.- TEORIA GEOMETRICA DE LA DIFRACCION DE KELLER (GTD)

Hasta este apartado, se ha demostrado que, en alta frecuencia, es posible construir el campo electromagnético en un punto 0 siguiendo métodos de óptica geométrica. Este campo de óptica geométrica  $\bar{E}_g$  es, según se ha visto, una aproximación del verdadero campo electromagnético existente en Q.

Para construir este campo es necesario establecer vinculaciones geométricas entre el manantial creador del campo, P, y el punto Q. Esas vinculaciones son los rayos y hasta ahora se ha visto que el campo de óptica geométrica en Q puede considerarse superposición de un rayo directo,  $\bar{E}_1$  (3.14), que se propaga por el medio homogéneo e isótropo según la recta  $\overline{PQ}$  y de rayos reflejados,  $\bar{E}_r$ .

(3.17), que conectan P con Q a través de obstáculos relativamente próximos al camino PQ.

$$\bar{E}_g = \bar{E}_i + \bar{E}_r$$

Ahora bien, como ya se ha señalado, este planteamiento conduce a situaciones singulares -las cáusticas- donde el campo se hace infinito. Su cálculo debe hacerse, en este caso, siguiendo otro tipo de aproximación.

Sin embargo, otro tipo de anomalías aparece como consecuencia de la presencia de obstáculos en el espacio donde se estudia el campo y es precisamente la superación de dichos obstáculos lo que ha conducido a las diferentes teorías de la difracción.

En primer lugar, el obstáculo crea una región de sombra en el espacio iluminado por el manantial. Por lo tanto, fundándose en la teoría expuesta hasta ahora, debería concluirse que el campo electromagnético es nulo en dichos puntos puesto que a ellos no llega ni el rayo directo, ni el reflejado. Sin embargo, como es sabido, esto no es cierto en general.

Por otra parte, siempre según la teoría expuesta, el paso de la región iluminada a la de sombra conduce a una discontinuidad de tipo escalón -paso de un campo finito a otro nulo-. La proyección del obstáculo desde el manantial define un conjunto de direcciones correspondientes al contorno de dicho obstáculo llamado límite de sombra. Además, los rayos que proyectan dicho contorno se reflejan en el obstáculo para dar origen a otro conjunto de direcciones denominado límite de reflexión.

Ambos límites determinan dos superficies regladas y, en general, tres regiones en el espacio. A los puntos de la región que contiene al manantial llegan los rayos directos y reflejados.

A los puntos de la región comprendida entre los límites de reflexión y sombra solo llegan los rayos directos y, finalmente, más allá del límite de sombra no existe ni uno, ni otro tipo de rayos.

La determinación de un campo no nulo en la zona de sombra es el objetivo de la Teoría Geométrica de la Difracción, GTD, mientras que la superación de las discontinuidades en los límites de sombra y reflexión se debe a la Teoría Uniforme de la Difracción, UTD.

El primer problema se tratará en este apartado, dejando para el III.3 el estudio de las mencionadas discontinuidades.

#### III.2.1.- POSTULADOS DE KELLER SOBRE LA DIFRACCION

Keller mostró ([1] - [5]) que la solución de la óptica geométrica podía ser mejorada incluyendo un nuevo tipo de rayos, los rayos difractados. El desarrollo que realizó con este objetivo es su conocida Teoría Geométrica de la Difracción que corresponde a las siglas inglesas GTD (Geometrical Theory of Diffraction).

Para ello, sus ideas básicas pueden resumirse en:

- El campo electromagnético asociado a los rayos difractados tienen el mismo carácter vectorial que los rayos directo y reflejado, de modo que la polarización es "transportada" a lo largo del rayo difractado al igual que ocurre con los otros dos.
- Para problemas canónicos de difracción (problemas sencillos que presentan un mismo comportamiento local que el que se desea resolver), las soluciones de la GTD deben coincidir con las asintóticas obtenidas por Sommerfeld [8].
- Los efectos producidos por los bordes en la difracción son, en líneas generales, los previstos por Young.

Sobre ellas estableció los siguientes postulados:

- 1) El campo difractado se propaga a lo largo de rayos cuyas trayectorias se determinan por una generalización del principio de Fermat, incluyendo puntos de la superficie límite en la trayectoria del rayo.
- 2) La difracción, de forma análoga a la reflexión, es un fenómeno local (en alta frecuencia) que depende de la naturaleza de la superficie límite y del campo incidente en las proximidades del punto de difracción.
- 3) El campo difractado se propaga a lo largo de su rayo de acuerdo con el principio de conservación de la energía en un tubo de rayos estrecho y la variación de fase de un punto a otro del rayo viene dada por el producto entre la distancia sobre el rayo y el número de ondas del medio. La dirección del campo difractado es perpendicular a la trayectoria de su rayo en cada punto.

Este último postulado es una consecuencia de los dos primeros. Así pues, el principio generalizado de Fermat puede enunciarse diciendo que: "El rayo difractado, originado cuando un rayo incidente (que puede proceder de una reflexión o difracción previa) choca con un borde, un vértice o incide rasante sobre una superficie yendo desde un punto P a otro Q, es una curva que tiene una longitud óptica estacionaria; es decir, extremal -normalmente un mínimo-. La trayectoria recorrida por el rayo es rectilínea cuando se propaga a través de un medio homogéneo e isótropo; cuando se desliza por una superficie, dicha trayectoria es una geodésica de la superficie.

### III.2.2.- LEY DE LA DIFRACCION EN BORDES

Para estudiar la difracción electromagnética que se pro-

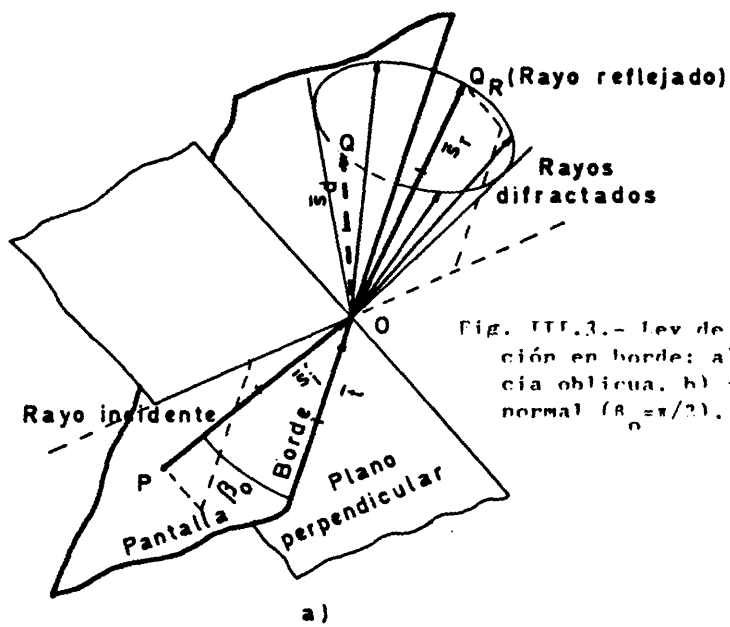
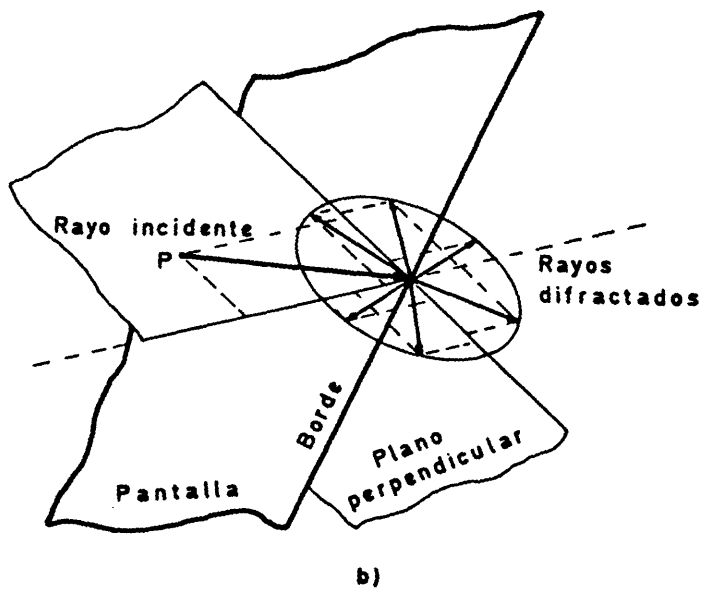


Fig. III.3.- Lev de la difracción en borde: a) incidencia oblicua, b) incidencia normal ( $\alpha_0 = \pi/2$ ).



duce cuando una onda choca con un borde, Keller comienza por suponer el caso sencillo de un borde recto en uno de cuyos puntos, 0, incide un rayo cuya dirección queda definida por el vector unitario  $\bar{s}_i$  (fig. III.3.a). El vector unitario  $\bar{t}$  (que determina la dirección del borde) define junto con  $\bar{s}_i$  el plano de incidencia y en él puede determinarse otro vector unitario  $\bar{s}_r$  que verifique la conocida ley de la reflexión

$$\bar{t} \cdot \bar{s}_i = \bar{t} \cdot \bar{s}_r$$

Ahora bien, fuera del plano de incidencia, existe un conjunto infinito de direcciones  $\bar{s}_d$  que verifican también el principio de Fermat:

$$\bar{t} \cdot \bar{s}_i = \bar{t} \cdot \bar{s}_d$$

Este conjunto (fig. III.3.a) se distribuye sobre el cono que tiene por vértice el punto 0; por eje, el borde; y por semiángulo en el vértice:

$$\beta_0 = \arcsin(\bar{t} \cdot \bar{s}_i) \quad (3.18)$$

En consecuencia, la ley de la difracción en borde recto puede enunciarse diciendo que "cuando un rayo incidente choca con un borde recto da lugar a infinitos rayos difractados, situados en distinto semiespacio que el incidente respecto al plano normal al borde recto en 0. Estos rayos difractados forman un cono: de vértice en el punto de difracción 0; de eje, el borde y de semiángulo, el que forman el rayo incidente y el borde".

Si la onda que incide sobre el borde es plana, la difracción producida por aquél es un conjunto de ondas planas cuyas normales se distribuyen sobre el mencionado cono. Este frente de

ondas difractadas constituye la onda cónica que dedujo Sommerfeld. Si la incidencia fuese normal, la onda difractada sería cilíndrica (fig. III.3.b), resultado también obtenido por Sommerfeld.

La expresión de la ley de difracción en borde curvo es análoga a la anterior en virtud del segundo postulado de Keller. Para obtenerla bastará sustituir en el primer párrafo "borde recto" por "borde curvo" y en el segundo párrafo "borde" por "tangente al borde en O".

Por todo lo dicho en este apartado, cualquier punto del borde puede ser vértice del cono de difracción donde confluyen todos los rayos difractados. El borde es pues, un lugar geométrico de puntos, caracterizados por ser intersección de infinitos rayos difractados, lo que equivale a una línea de puntos degenerados, es decir, una cáustica.

### III.2.3.- CAMPO DIFRACTADO EN UN BORDE

Como consecuencia de la ley de la difracción en un borde (sea recto o curvo), el campo difractado tiene el carácter del de un rayo óptico, por lo que su expresión será del tipo (3.14). En ella se comparan los campos en puntos que distan  $s$  y  $s_0$  respectivamente del origen tomado sobre el rayo difractado.

Si el origen se toma sobre el punto de difracción, entonces  $s_0=0$ . Ahora bien, al estar dicho punto sobre la primera cáustica,  $\rho_1$  o  $\rho_2$  deben ser nulos; por ejemplo:

$$\rho_1 = 0$$

Por otra parte, el punto de difracción es origen del rayo difractado, por lo que la sección del pincel de ondas en él será nula:

$$d\sigma_0 = 0$$



Ambas condiciones exigen que:

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow 0} |\bar{E}_d(s_0)| = \infty$$

Además, como el flujo de energía a lo largo del pincel debe mantenerse constante y no nulo:

$$|\bar{E}_d(s)|^2 d\sigma_s = |\bar{E}_d(0)|^2 d\sigma_0 = \text{finito} \neq 0$$

y por otra parte de (3.14):

$$|\bar{E}_d(0)|\sqrt{\rho_1} = \text{finito} \neq 0$$

Por consiguiente, si se define  $A'(0)$  por:

$$A'(0) = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} |\bar{E}_d(0)|\sqrt{\rho_1}$$

(3.14) se transformará en:

$$\bar{E}_d(s) = A'(0) e^{-jk\psi_0} \sqrt{\frac{\rho}{s(s+\rho)}} e^{-jks} \bar{u}_0 \quad (3.19)$$

donde  $\bar{u}_0$  es el vector unitario que da la dirección de  $\bar{E}_d(s)$  y  $\rho$  (anteriormente  $\rho_2$ ) es la distancia, medida sobre el propio rayo, entre el punto de difracción y la segunda cáustica.

A este nivel, Keller postula que el campo difractado es proporcional al campo incidente en el punto de difracción. Si este se designa por  $\bar{E}_i$ , se puede establecer que:

$$A'(0) e^{-jk\psi_0} \bar{u}_0 = ((D)) \bar{E}_i$$

donde  $((D))$  es la matriz de transformación del vector complejo  $\bar{E}_i$  en otro vector -el del primer miembro- que tiene la dirección de  $\bar{E}_d(s)$ .

Por lo tanto, sustituyendo este cambio en (3.19) se obtiene finalmente:

$$\bar{E}_d(s) = ((D)) \bar{E}_i \sqrt{\frac{\rho}{s(s+\rho)}} e^{-jks} \quad (3.20)$$

Ahora bien, el conocimiento del campo difractado  $\bar{E}_d(s)$  a una distancia  $s$  del punto de difracción  $O$  exige, no solo conocer el campo incidente en  $O$  (lo cual se presupone), sino también:

- la distancia cáustica  $\rho$  y
- la matriz de transformación  $((D))$  que, en condiciones particularmente sencillas, puede reducirse a un simple escalar.

### III.2.3.1. Distancia cáustica

En la figura III.4 puede verse que, cuando dos rayos  $\bar{s}'_1$  y  $\bar{s}'_2$  procedentes del manantial  $P$  inciden sobre dos puntos  $O_1$  y  $O_2$  muy próximos de un borde curvo, los correspondientes rayos difractados,  $\bar{s}_1$  y  $\bar{s}_2$ , pueden cortarse sobre puntos  $C$  de una cáustica. En estas condiciones, la distancia  $\rho = \overline{O_1 C_1}$ , entre el borde y la cáustica, se llama distancia cáustica de la difracción.

Esta distancia corresponde a la que anula el denominador de (3.20):

$$s = -\rho$$

En consecuencia, si se toman positivas las  $s$  contadas desde el punto de difracción a la cáustica, es evidente que  $\rho$  debe ser un número negativo; en estas condiciones, en las proximidades del borde:

$$\frac{\rho}{s(s+\rho)} > 0$$

y a medida que el rayo difractado se acerca a la cáustica, este valor crece hasta pasar de  $+\infty$  a  $-\infty$ , al cruzarla. Como la raíz

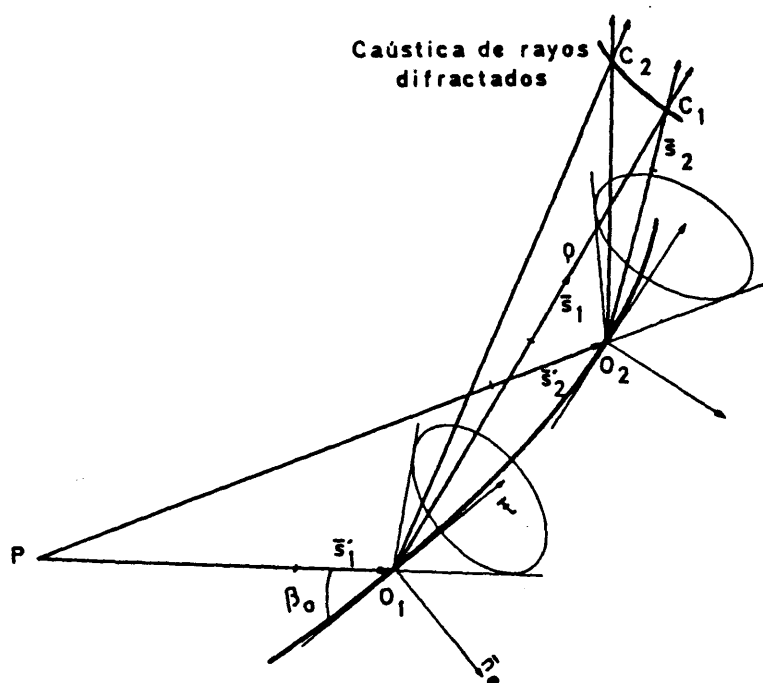


Fig. III.4.- Distancia cáustica de la difracción,  $\rho$ .

cuadrada de (3.20) se toma siempre como real, la fase variará bruscamente de 0 a  $\pi/2$  cuando se atraviese la cáustica.

El valor de  $\rho$  depende lógicamente de los parámetros característicos del frente de onda incidente y del borde. Esta dependencia viene definida por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{\bar{n}_e \bar{s}' - \bar{n}_e \bar{s}}{\rho_B \sin^2 \beta_0} \quad (3.21)$$

donde  $\rho_B$  y  $\rho_e^i$  son, respectivamente, los radios de curvatura del borde y del frente de onda incidente en el plano de incidencia ( $\bar{s}'$  y  $\bar{t}$ );  $\beta_0$  es el ángulo dado por (3.18) y los vectores unita-

rios  $\bar{s}'$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{t}$  y  $\bar{n}_e$  (fig. III.5) son respectivamente los relativos al rayo incidente, al difractado, a la tangente y a la normal al borde en el punto de difracción.

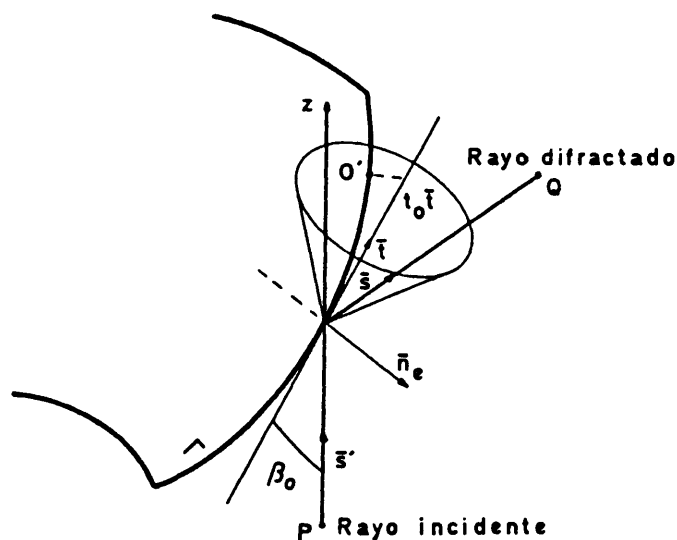


Fig. III.5.- Difracción en borde curvo

Para deducir (3.21), se considerará el caso de un rayo  $\bar{s}'$  que incide sobre un borde  $\Gamma$  en el punto  $O$ , formando un ángulo  $\beta_0$  con la tangente  $\bar{t}$  a  $\Gamma$  en  $O$  (fig. III.5).

Recordando conceptos básicos de geometría diferencial, el borde queda determinado en las proximidades de  $O$  por:

$$\bar{O}'(t_0) = t_0 \bar{t} - \frac{1}{2} \frac{t_0^2}{\rho_B} \bar{n}_e \quad (3.22)$$

donde  $t_0$  es el parámetro de la curva  $\Gamma$  (equivalente a la velocidad de la ecuación fundamental de cinemática). Además, en el segundo término se ha introducido el signo  $(-)$ , lo que equivale a considerar  $\bar{n}_e$  como normal principal dirigida hacia "afuera"

sentido contrario al centro de curvatura).

Ahora bien, la variación de fase del pincel incidente en las proximidades de 0 viene dada por (A2.3) del Apéndice AII, que se repetirá aquí para seguir mejor este proceso ( $s'$  sustituye ahora a la  $z$  de la expresión anterior).

$$k L'(r) - k L'(0) = k s' + \frac{k}{2} (\bar{x} \cdot Q^i \bar{x}) \quad (3.23)$$

La obtención de los dos sumandos del segundo miembro de la igualdad se conseguirá proyectando (3.22) sobre:

a) la dirección del rayo incidente,  $\bar{s}'$ :

$$s' = t_0 \cos \beta_0 - \frac{1}{2} \frac{t_0^2}{\varphi_B} \bar{n}_e \bar{s}'$$

b) un plano perpendicular al rayo incidente (fig. III.6)

(el vector  $\bar{x}$ , proyección sobre ese plano, viene dado en el Apéndice por  $\bar{x} = \sigma_i \bar{x}_i$ )

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = t_0 \sin \beta_0 \begin{Bmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{Bmatrix}$$

$\Omega$  queda bien definido en la figura III.6.

Con este resultado se está en condiciones de hacer la transformación  $Q^i \bar{x}$ , donde  $Q^i$  es la matriz de curvatura del frente de onda incidente ((A 2.8) del Apéndice AII).

En efecto,

$$Q^i \bar{x} = t_0 \sin \beta \left( \frac{\cos \Omega}{\varphi_1^i} \bar{x}_1 + \frac{\sin \Omega}{\varphi_2^i} \bar{x}_2 \right)$$

$$\bar{x} \cdot Q^i \bar{x} = \frac{t_0^2 \sin^2 \beta_0}{\varphi_e^i}$$

siendo

$$\frac{1}{\varphi_e^i} = \frac{\cos^2 \Omega}{\varphi_1^i} + \frac{\sin^2 \Omega}{\varphi_2^i} \quad (3.24)$$

donde  $\varphi_1^i$ ,  $\varphi_2^i$  son los radios de curvatura principales del frente de onda incidente en O.

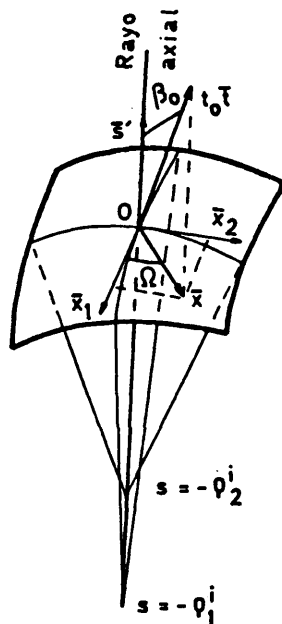


Fig. III.6.- Pincel incidente en O, cuyo rayo axial está en la dirección  $\bar{s}'$ .

Sustituyendo los resultados de a) y b) en (3.23), se obtiene:

ne:

$$k L'(r) - k L'(0) = k t_0 \cos \beta_0 + \frac{k t_0^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \beta_0}{\varphi_e^i} - \frac{\bar{n}_e \cdot \bar{z}'}{\varphi_B} \right)$$

Si, a continuación, se repite el proceso para el rayo difractado, se llegará a una expresión análoga:

$$k L(r) - k L(0) = k t_0 \cos \beta'_0 + \frac{k t_0^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \beta'_0}{\varphi} - \frac{\bar{n}_e \cdot \bar{z}}{\varphi_B} \right)$$

donde  $\beta'_0$  es el ángulo que forma  $\bar{s}$  con  $\bar{t}$  y  $\rho$  es la distancia cáustica (obsérvese que, por ser el borde una cáustica, uno de los  $\varphi_0$  cos es 0 y el otro dista  $\rho$  de 0).

Finalmente, imponiendo la condición de fase estacionaria, se deben verificar simultáneamente:

$$\cos \beta_0 = \cos \beta'_0$$

$$\frac{\sin^2 \beta_0}{\varphi_e^i} - \frac{\bar{n}_e \cdot \bar{z}'}{\varphi_B} = \frac{\sin^2 \beta'_0}{\varphi} - \frac{\bar{n}_e \cdot \bar{z}}{\varphi_B}$$

La primera condición coincide con la ley de Keller de la difracción y la segunda se simplifica en (3.21).

### III.2.3.2.- Matriz de difracción electromagnética en G.T.D.

De (3.20) se deduce que, para conocer el campo "transportado" por el rayo difractado, debe determinarse la matriz ((D)) que transforma el campo incidente  $\bar{E}_i$  en otro que, salvo un factor escalar, es el campo difractado  $\bar{E}_d$ .

En primer lugar, el análisis dimensional de (3.20) demuestra que los elementos de la matriz ((D)) varían con la raíz cuadrada de una distancia característica del problema que, salvo un factor correctivo adimensional, debe ser la longitud de onda  $\lambda$ ,

su inversa, el número de ondas  $k$ . En consecuencia, los elementos de  $((D))$  varían según  $k^{-\frac{1}{2}}$ .

Sin embargo,  $((D))$  no puede determinarse, como es habitual, imponiendo condiciones de contorno a (3.20), puesto que el límite es una cáustica de rayos difractados. La solución debe obtenerse comparando (3.20) con expresiones exactas obtenidas en problemas canónicos.

Esquemáticamente, el proceso consistirá en deducir, en esos casos, una expresión exacta del campo total, teniendo en cuenta la presencia del borde. A partir de ella, se deducirá una aproximación asintótica de alta frecuencia y, a continuación, se descompondrá la correspondiente solución en tres sumandos asociados respectivamente a los campos incidente, reflejado y difractado. Deducida la expresión del campo difractado, se comparará con el dado por (3.20), lo que hará posible determinar  $((D))$ .

#### III.2.3.2.1.- Solución de Sommerfeld

El problema canónico que se va a tratar es el que corresponde a la difracción de una onda plana que incide sobre el borde recto de un semiplano.

Evidentemente, resultaría desproporcionado desarrollar aquí la deducción de Sommerfeld; sin embargo, es importante recoger al menos su terminología y, sobre todo, sus conclusiones.

El semiplano conductor se supondrá definido por la ecuación  $y=0$ , con la restricción  $x > 0$  (fig. III.7) y el borde, por el eje  $z$ .

Por otra parte, la onda plana -paralela al borde- quedará determinada espacialmente por la dirección  $\vec{s}'$  del rayo inci-



dente asociado -normal al borde- que forma un ángulo  $\phi'_0$  con la dirección negativa del eje x. La polarización del campo eléctrico  $\vec{E}$  (o del campo magnético  $\vec{H}$ ) se supondrá asimismo paralela al borde.

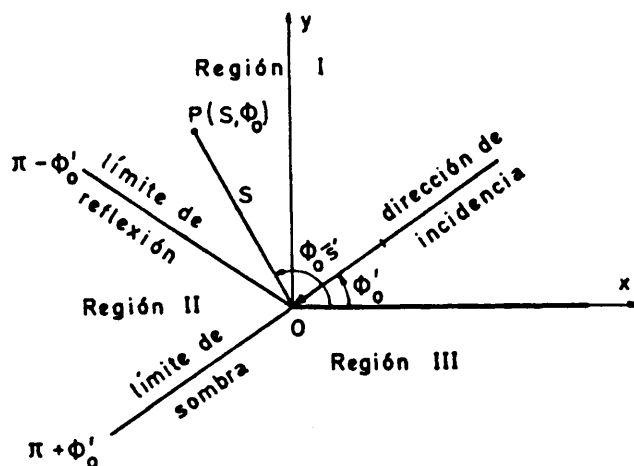


Fig. III.7.- Regiones determinadas por los límites de sombra y de reflexión y el semiplano conductor.

Por consiguiente, el problema queda simplificado en uno bidimensional, cuyo plano es normal al borde y el campo  $\vec{E}$  (o  $\vec{H}$ ) puede representarse por un escalar.

En estas condiciones, la onda plana incidente,  $u_0$ , de amplitud A y fase nula en el origen, será, en un punto P de coordenadas  $(s, \phi_0)$ :

$$u_0 = A \exp[jks \cos(\phi_0 - \phi'_0)] \quad (3.25)$$

(El signo + que aparece en la fase proviene de que al tomar el borde como origen, las distancias  $s'$ , definidas en el sentido de propagación del rayo incidente, deben cambiarse de sentido).

El campo  $\underline{u}$  buscado, que es el  $\underline{u}_0$  modificado por la presen

cia de la pantalla, deberá verificar las siguientes condiciones:

a) la ecuación de ondas:  $\Delta u + k^2 u = 0$

b) las condiciones de contorno sobre la pantalla definida por  $\phi_0 = 0$  y  $\phi_0 = 2\pi$ :  $u=0$  para  $\vec{E}$  (o  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  para  $\vec{H}$ );

c) la condición de radiación en el infinito:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{\partial v}{\partial s} - jkv \right) = 0; \quad v = \begin{cases} u - u_0 & \text{para } 0 < \phi_0 < \pi + \phi'_0 \\ u & \text{para } \pi + \phi'_0 < \phi_0 < 2\pi \end{cases}$$

d) la condición de  $u$  finita y continua por doquier, incluido el borde:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Im \cdot \text{grad } u \rightarrow 0$$

Con estas condiciones, Sommerfeld considera que la solución exacta debe tener una periodicidad de  $4\pi$  y que debe ser superposición de dos funciones, formalmente iguales, de  $s$  y de  $\psi$ . La variable  $\psi$  es la diferencia o suma de  $\phi_0$  y  $\phi'_0$  para la primera o la segunda de dichas funciones respectivamente; es decir.

$$u = U(s, \psi_-) \mp U(s, \psi_+); \quad \psi_{\mp} = \phi_0 \mp \phi'_0 \quad (3.26)$$

La superposición será diferencia (suma) cuando se trate la polarización eléctrica (magnética), en cuyo caso  $u$  representará el campo  $E_z$  ( $H_z$ ) total.

La expresión de  $U(s, \psi)$ , deducida por Sommerfeld [8] y [12], es:

$$U(s, \psi) = u_0(s, \psi) \frac{\exp(j\pi/4)}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^r \exp(-j \frac{\pi}{2} t^2) dt \quad (3.27)$$

donde  $r$  está ligada a  $\psi$  mediante:

$$r = 2 \sqrt{\frac{ks}{\pi}} \cos(\psi/2)$$

y  $u_0(s, \psi)$  se deduce de (3.25), que incluye ahora las dos soluciones (3.26).

La integral que aparece en (3.27) es la conocida integral de Fresnel,  $I_F$ , que puede transformarse en:

$$I_F = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt - j \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt + \int_0^r \exp\left(-j \frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

en la que, los dos primeros sumandos -coseno y seno-, son [22]:

$$C(0) = S(0) = 0; \quad C(\infty) = S(\infty) = 1/2$$

por lo tanto,

$$I_F = \frac{\exp(-j\pi/4)}{\sqrt{2}} + \int_0^r \exp\left(-j \frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

que introducida en (3.27) conduce a:

$$u = \left[ \frac{1}{2} u_0(s, \psi_-) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_0(s, \psi_-) \exp(j\pi/4) \int_0^{r_-} \exp\left(-j \frac{\pi}{2} t^2\right) dt \right] \mp \left[ \frac{1}{2} u_0(s, \psi_+) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_0(s, \psi_+) \exp(j\pi/4) \int_0^{r_+} \exp\left(-j \frac{\pi}{2} t^2\right) dt \right] \quad (3.28)$$

correspondiendo la diferencia (suma) a la polarización eléctrica (magnética).

### III.2.3.2.2.- Desarrollo asintótico de Keller

Se ha visto anteriormente que la integral de Fresnel tiende a  $(1+j)/2$  cuando  $r$  tiende a infinito, por consiguiente, para valores suficientemente elevados de  $r$ , podrá considerarse igual a este valor más un término correctivo de la forma:

$$\frac{1}{r} \sum_{h=0}^{\infty} A_h r^{-h}$$

Limitando esta serie al primer término,  $A_0$ , se tendrá:

$$\int_0^r \exp(-j \frac{\pi}{2} t^2) dt = \epsilon \frac{\exp(-j\pi/4)}{\sqrt{2}} + \frac{A_0}{r}$$

siendo  $\epsilon = \pm 1$  según sea  $r \gtrless 0$ . Keller elige el valor de  $A_0$  a partir de los desarrollos asintóticos del coseno y seno integrales [22] con lo que:

$$A_0 = \frac{j \exp(-j \frac{\pi}{2} r^2)}{\pi}$$

En consecuencia, el desarrollo asintótico del que parte Keller es:

$$\int_0^r \exp(-j \frac{\pi}{2} t^2) dt = \epsilon \frac{\exp(-j\pi/4)}{\sqrt{2}} - \frac{\exp(-j\pi/2) \exp(-j \frac{\pi}{2} r^2)}{\pi r} \quad (3.29)$$

Ahora bien, al sustituir (3.29) en (3.28) los dos términos procedentes del

$$- \frac{\exp(-j\pi/2) \exp(-j \frac{\pi}{2} r^2)}{\pi r}$$

se transforman, teniendo en cuenta la definición de  $r$ :

$$\begin{aligned} T = & - \frac{u_0(s, \psi) \exp[j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} r^2)]}{\sqrt{2} \pi r} = - \frac{A \exp[j(ks \cos \psi - \frac{\pi}{4} - 2ks \cos^2 \frac{\psi}{2})]}{2 \sqrt{2} \pi ks \cos \frac{\psi}{2}} = \\ & - \frac{A \exp(-j\pi/4)}{2 \sqrt{2} \pi ks \cos \frac{\psi}{2}} \exp[jks(\cos \psi - 2 \cos^2 \frac{\psi}{2})] = - \frac{A \exp(-j\pi/4)}{2 \sqrt{2} \pi ks \cos \frac{\psi}{2}} \exp(-jks) \end{aligned}$$

con lo que se obtiene finalmente:

$$u = \left[ \frac{1}{2} u_0(s, \Phi_0 - \Phi'_0) + \frac{\epsilon_-}{2} u_0(s, \Phi_0 - \Phi'_0) \right] \pm \left[ \frac{1}{2} u_0(s, \Phi_0 + \Phi'_0) + \frac{\epsilon_+}{2} u_0(s, \Phi_0 + \Phi'_0) \right] + \left[ -A \frac{\exp(-jks) \exp(-j\pi/4)}{2\sqrt{2\pi ks}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\Phi_r - \Phi'_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\Phi_0 + \Phi'_0}{2}} \right) \right] \quad (3.30)$$

donde, como siempre, el doble signo  $\mp$  hace referencia respectivamente al caso del campo eléctrico y magnético.

Si, para abreviar, se designa por  $u_i$  al primer paréntesis cuadrado de (3.30), por  $u_r$ , al segundo y por  $u_d$ , al tercero, el campo total en un punto de coordenadas  $(s, \Phi_0)$  vendrá dado por:

$$u = u_i + u_r + u_d$$

Veamos esquemáticamente cómo evolucionan estos campos al variar  $\Phi_0$  desde 0 a  $2\pi$  y barrer de este modo las tres regiones de la figura III.7.

Región I. (Comprendida entre el semiplano conductor y el límite de reflexión).

$$(\Phi_0 - \Phi'_0)/2 < (\Phi_0 + \Phi'_0)/2 < \pi/2$$

$$r_- > r_+ > 0$$

$$\epsilon_- = \epsilon_+ = 1$$

$$u_i = u_0(s, \Phi_0 - \Phi'_0); \quad u_r = u_0(s, \Phi_0 + \Phi'_0); \quad u_l = u_i + u_r + u_d$$

Región II. (Comprendida entre los límites de reflexión y sombra).

$$\begin{aligned} (\Phi_0 - \Phi'_0)/2 &< \pi/2 < (\Phi_0 + \Phi'_0)/2 \\ r_- &> 0 > r_+ \\ \epsilon_- &= 1 = -\epsilon_+ \end{aligned}$$

$$u_i = u_0(s, \Phi_0 - \Phi'_0); \quad u_r = 0; \quad u_{II} = u_i + u_d$$

Región III. (Comprendida entre el límite de sombra y el semiplano conductor).

$$\begin{aligned} \pi/2 &< (\Phi_0 - \Phi'_0)/2 < (\Phi_0 + \Phi'_0)/2 \\ 0 &> r_- > r_+ \\ 1 &= -\epsilon_- = -\epsilon_+ \end{aligned}$$

$$u_i = 0; \quad u_r = 0; \quad u_{III} = u_d$$

Se observa pues que, en la primera región, donde existen los rayos incidente, reflejado y difractado, los campos  $u_i$ ,  $u_r$  y  $u_d$  tienen valores, en general, no nulos; en la segunda, donde desaparece el reflejado, se anula  $u_r$  y en la tercera, donde desaparece también el incidente, se anula  $u_i$ , permaneciendo únicamente  $u_d$ .

Keller asocia pues el campo  $u_i$  al rayo incidente,  $u_r$  al reflejado y

$$u_d = -A \frac{\exp(-jks)\exp(-j\pi/4)}{2\sqrt{2\pi ks}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\Phi_0 - \Phi'_0}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\Phi_0 + \Phi'_0}{2}} \right) \quad (3.31)$$

al nuevo rayo difractado.

(3.30) expresa el campo difractado en cualquier punto como superposición de tres campos bien determinados, asociados res

pectivamente a los tres rayos mencionados según los conceptos de óptica de rayos introducida por Keller.

Antes de terminar este apartado hay que subrayar que la aproximación asintótica de Keller presupone que  $r$  es "suficientemente elevado". Sin embargo, como  $r$  es proporcional a  $\sqrt{s}$  y a  $\cos(\varphi/2)$ , ello equivale a situar el punto de observación a "suficiente" distancia del borde ( $s$  elevado), pero también a suponer que  $\cos(\varphi/2)$  es suficientemente lejano de cero. Como  $\cos(\varphi/2)$  se anula en los límites de reflexión y sombra (donde (3.31) se hace singular), la expresión obtenida no será válida en esos límites, ni tampoco en sus proximidades.

Esta circunstancia va a exigir una teoría complementaria -la UTD- que permita superar esta dificultad.

### III.2.3.3.- Coefficiente de difracción de la GTD para el borde de un semiplano conductor.

Comparando  $u_d$  de (3.31), deducido a partir de la solución de Sommerfeld, con el campo difractado (3.20), determinado a partir de los principios de Keller, se obtiene:

$$D \sqrt{\frac{\varphi}{s(s+\varphi)}} = -\frac{\exp(-j\pi/4)}{2\sqrt{2\pi ks}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\Phi_\sigma - \Phi'_\sigma}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\Phi_\sigma + \Phi'_\sigma}{2}} \right) \quad (3.32)$$

donde el coeficiente de difracción  $D$  aparece como una simplificación, en este caso, de la matriz de difracción ((D)).

Ahora bien, de (3.21) se deduce que, en el caso tratado, por ser planas las ondas incidentes ( $\rho_e^i = \infty$ ) y el borde, recto ( $\rho_B = \infty$ )

$$\varphi = \infty$$

con lo que

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\varphi}{s(s+\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

y los coeficientes de difracción son:

$$D_{E,H} = - \frac{\exp(-j\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\Phi_0 - \Phi'_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\Phi_0 + \Phi'_0}{2}} \right)$$

correspondiendo el signo - (+) al campo  $\bar{E}(\bar{n})$ .

En lo sucesivo, siguiendo la notación de Kouyoumjian, estos coeficientes se designarán respectivamente por  $D_s$  (soft) y  $D_h$  (hard).

En el caso de que la onda incida oblicuamente sobre el borde, formando con él un ángulo  $\theta_0$ , Keller obtuvo la expresión

$$D_{s,h} = - \frac{\exp(-j\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left( \frac{1}{\cos \frac{\Phi_0 - \Phi'_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\Phi_0 + \Phi'_0}{2}} \right) \quad (3.33)$$

generalización de la anterior.

Asimismo, si el borde fuera curvo en lugar de recto (2º postulado de Keller) y la onda incidente no fuera plana, el campo difractado sería, recordando (3.20):

$$u_d = A D_{s,h} \sqrt{\frac{\varphi}{s(s+\varphi)}} \exp(-jks) \quad (3.34)$$

donde  $D_{s,h}$  vienen dados por (3.33) y la distancia cáustica  $\varphi$  debe calcularse a partir de (3.21), en la que intervienen las curvaturas del borde y de la onda incidente en él.



### III.2.3.4.- Coefficientes de difracción para el borde recto de una cuña.

El problema de la cuña formada por la intersección de dos semiplanos conductores es, evidentemente, una generalización del caso anteriormente tratado.

La característica geométrica de la cuña es el ángulo  $\nu$  que forman los planos, medido por la parte "maciza" de la misma. Sin embargo, es usual caracterizarla por otro parámetro  $n$  definido por:

$$\nu = (2 - n) \pi$$

Teniendo en cuenta la figura III.8, está claro que  $n\pi$  es el ángulo que forman los dos semiplanos por su parte exterior.

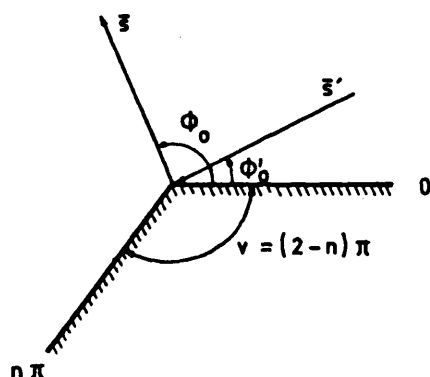


Fig. III.8.- Proyección de los rayos incidente y difractado sobre un plano perpendicular al borde de la cuña

La deducción del campo difractado en la cuña fué desarrollada por Keller, a partir de la solución exacta de Mac Donald [13]. El método seguido fué análogo al descrito en los apartados anteriores y, en consecuencia, los coeficientes de difracción deducidos:

$$D_{s,h} = \frac{\exp(-j\pi/4) \sin \frac{\pi}{n}}{n \sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\Phi_0 - \Phi'_0}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\Phi_0 + \Phi'_0}{n}} \right)$$

son también inválidos, como puede observarse, en las proximidades de los límites de reflexión y sombra.

Es evidente que esta expresión se reduce a la (3.33) cuando  $n=2$ , resultado que pone en evidencia que el caso del semiplano es uno particular de cuña, el correspondiente a  $v=0$ .

No se ha creído conveniente detallar aquí ese desarrollo debido a la analogía mencionada; por otra parte, más adelante, al tratar la cuña con la UTD, se considerará dicho caso con suficiente extensión.

### III.2.3.5.- Matriz de difracción electromagnética en la GTD

En (3.20) se vió que el campo difractado viene caracterizado en general, por un vector  $\vec{E}_d$  que, salvo funciones escalares, es el transformado del vector campo incidente  $\vec{E}_i$  a través de la matriz de difracción  $((D))$ .

En el caso tratado, dicha matriz se simplifica en el coeficiente de difracción  $D_s$  ( $D_h$ ) cuando el campo eléctrico  $\vec{E}$  (magnético  $\vec{H}$ ), es paralelo al borde.

Cuando la polarización transportada por la onda plana presenta una dirección cualquiera respecto al borde, debe considerarse la matriz  $((D))$ .

Keller, a partir de la solución de Jones [14] al problema de la difracción de una onda plana de polarización arbitraria que incida sobre el borde de un semiplano conductor, obtiene una matriz de difracción de orden  $3 \times 3$ , expresando los campos

en una base formada por los vectores tangente, normal y binormal al borde [1].

Tampoco aquí se desarrollará este proceso, puesto que al tratar esta misma cuestión con la UTD se deducirá con detalle una matriz de transformación, diagonal de orden  $2 \times 2$ , cuyos elementos son directamente los coeficientes de difracción  $D_s$  y  $D_h$ .

Como conclusión de este apartado III.2, donde se han recogido las líneas fundamentales de la GTD de Keller, se van a señalar las principales características de los coeficientes de difracción  $D_s$  y  $D_h$ .

- 1º) Dependen de las direcciones de incidencia y difracción, de la longitud de onda y de las características geométricas del borde en el punto de difracción.
- 2º) Son válidos para cualquier tipo de iluminación.
- 3º) Son válidos tanto para bordes curvos como para rectos.
- 4º) Son inválidos en las proximidades de los límites de reflexión y sombra.
- 5º) Son inválidos en los extremos del borde.
- 6º) Son inválidos también en las cáusticas.

La superación de la invalidez 4º) se tratará, a continuación, en el capítulo IV, donde se desarrolla la Teoría Uniforme de la Difracción.

Por otra parte, en el capítulo V, se describirán métodos para resolver las dificultades 5º) y 6º).

## CAPITULO IV

### TEORIA GEOMETRICA UNIFORME DE LA DIFRACCION

Según se ha indicado anteriormente, la solución GTD, al problema de difracción en cuña conductora, carece de validez en los límites de reflexión y sombra.

La solución correcta de alta frecuencia, para el campo total, debe ser continua en dichos límites, de modo que el campo difractado correcto debe compensar las discontinuidades del campo de óptica geométrica que aparecen en ellos.

La teoría geométrica uniforme de la difracción ("Uniform Theory of Diffraction", UTD) ha sido desarrollada por Kouyoumjian y otros autores [18], [19] con este fin.

En este capítulo nos limitaremos a describir con algún detalle la solución que dicha teoría da al problema de la difracción en una cuña recta. Las conclusiones extraídas de este problema pueden extenderse a un borde curvo.

En la cuña recta, la solución UTD, fundamentada en el desarrollo asintótico de Pauli-Clemmow [15], [16], contiene resultados concordantes con los obtenidos mediante la teoría espectral de Mittra y Rahmat-Samii [23], [24] para el semiplano o las soluciones canónicas de la cuña [15], [25].

Además, cuando la cuña se simplifica en un semiplano ( $v=0$ ), la solución UTD se reduce a la solución exacta de Sommerfeld.

Finalmente, hay que indicar que todo el desarrollo hecho en el apartado III.2 salvo lo relativo a la determinación de los coeficientes de difracción, es válido en la UTD. Por consiguiente, solo el parágrafo III.2.3.2 y, en particular, el III.2.3.2.2 relativo al desarrollo asintótico de Keller deberán ser sustituidos.

#### IV.1.- ESTRUCTURAS DE LA MATRIZ DE DIFRACCION EMPLEADA EN LA UTD Y DEL CAMPO DIFRACTADO.

Es evidente que la elección de referenciales para describir analíticamente los campos incidente y difractado sobre un borde determina la estructura de la matriz de difracción ((D)) y, en consecuencia, influye en la simplificación del problema.

Por consiguiente, parece lógico que, antes de abordar el caso de la difracción en cuña recta con la UTD, deban describirse los referenciales que se emplean en ella y que van a conducir, según se verá a continuación, a una matriz de transformación de segundo orden y diagonal.

En primer lugar, es evidente que los tres vectores unitarios fundamentales del problema de difracción tratado son los correspondientes: al rayo incidente  $\bar{s}'$ , a la tangente al borde,  $\bar{t}$  y al rayo difractado  $\bar{s}$ . Los dos primeros determinan el plano de incidencia ligado al borde y, los dos últimos, el de difracción, verificándose además:

$$\bar{s}' \cdot \bar{t} = \bar{s} \cdot \bar{t} = \sin \beta_0 \quad (4.1)$$

en virtud de la ya mencionada condición de adaptación de fase en el borde.

Además, si la tangente al borde se considera como eje polar, estos dos planos son azimutales, por lo que quedarán deter-

minados por sus respectivos azimuts  $\phi'_0$  y  $\phi_0$  tal como se representa en la figura IV.1.

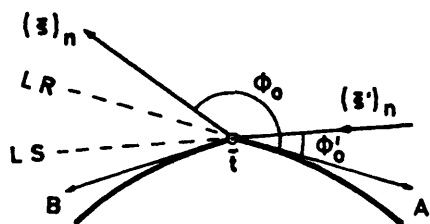


Fig. IV.1 - Proyección del rayo incidente  $(\bar{s}')_n$ , del rayo difractado  $(\bar{s})_n$ , de los límites de sombra LS y de reflexión LR, y de las tangentes a las superficies que forman la cuña, A y B, sobre un plano perpendicular al borde  $\bar{t}$ .

Las normales unitarias podrán definirse mediante:

$$\bar{\Phi}'_0 = \frac{\bar{t} \times \bar{s}'}{|\bar{t} \times \bar{s}'|} ; \quad \bar{\Phi}_0 = \frac{\bar{s} \times \bar{t}}{|\bar{s} \times \bar{t}|} \quad (4.2)$$

donde la solución particular  $\bar{s}=\bar{s}'$  que conduce a la coincidencia de ambos planos, determina, sin embargo, dos normales opuestas.

Finalmente, para completar ambos referenciales, se utilizarán las expresiones:

$$\bar{\beta}'_0 = \bar{s}' \times \bar{\Phi}'_0 ; \quad \bar{\beta}_0 = \bar{s} \times \bar{\Phi}_0 \quad (4.3)$$

que determinan los dos vectores unitarios  $\bar{\beta}'_0$  y  $\bar{\beta}_0$ , paralelos a los planos de incidencia y difracción ligados al borde, respectivamente.

En la figura IV.2, en la que se representan ambos triángulos de referencia, el borde es la recta de dirección  $\bar{t}$ .

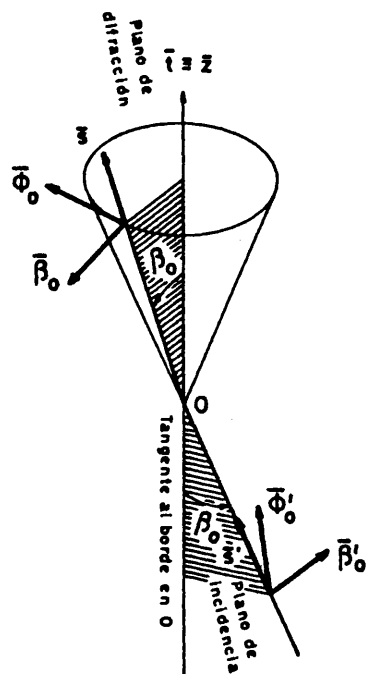


Fig. IV.2 - Planos de incidencia y difracción ligados al borde y triedros asociados a los rayos incidente y difractado.

En relación a estos referenciales, los campos incidente  $\vec{E}_i$  y difractado  $\vec{E}_d$  (respectivamente perpendiculares a los rayos  $\vec{s}'$  y  $\vec{s}$ ) podrán descomponerse en:

$$\vec{E}_i = E_{\beta_0}^i \vec{\beta}_0 + E_{\Phi_0}^i \vec{\Phi}_0 \quad (4.4)$$

$$\vec{E}_d = E_{\beta_0}^d \vec{\beta}_0 + E_{\Phi_0}^d \vec{\Phi}_0$$

En estas condiciones, la expresión (3.20) puede transformarse en otra más sencilla, en la que la matriz genérica ((D)) se simplifique en otra diagonal.

En efecto, las componentes de los campos, paralelas al borde de ( $\bar{z} \approx \bar{t}$ ), serán:

$$E_z^i = \bar{t} \cdot \bar{E}_i = E_{\beta_0}^i (\bar{t} \cdot \bar{\beta}_0') + E_{\phi_0}^i (\bar{t} \cdot \bar{\phi}_0') = E_{\beta_0}^i \text{sen } \beta_0 \quad (4.5)$$

(puesto que de (4.2) se deduce inmediatamente  $\bar{t} \cdot \bar{\phi}_0' = 0$  y de (4.1) y (4.3):  $\bar{t} \cdot \bar{\beta}_0' = \text{sen } \beta_0$ ) y, análogamente:

$$E_z^d = -E_{\beta_0}^d \text{sen } \beta_0 \quad (4.6)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta:

$$\bar{H} = Y_c \bar{s} \times \bar{E}$$

donde  $Y_c = \sqrt{\epsilon/\mu}$ , se deduce fácilmente que:

$$H_z^i = Y_c E_{\phi_0}^i \text{sen } \beta_0; \quad H_z^d = -Y_c E_{\phi_0}^d \text{sen } \beta_0 \quad (4.7)$$

Ahora bien, suponiendo que el campo  $\bar{E}(\bar{n})$  tenga polarización paralela al borde, (3.20) se simplifica en:

$$\begin{pmatrix} E_z^d \\ H_z^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_s E_z^i \\ D_h H_z^i \end{pmatrix} A(s) e^{-jks} \quad (4.8)$$

siendo  $D_s(D_h)$  los coeficientes de difracción escalares correspondientes al caso en que el campo total tenga polarización  $\bar{E}(\bar{n})$  paralela al borde y

$$A(s) = \sqrt{\frac{\varphi}{s(\varphi+s)}} \quad (4.9)$$



Finalmente, sustituyendo (4.5), (4.6) y (4.7) en (4.8), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^d \\ E_{\Phi_0}^d \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -D_s & 0 \\ 0 & -D_h \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\Phi_0}^i \end{Bmatrix} A(s) e^{-jks} \quad (4.10)$$

designando en lo sucesivo por  $((D))$  a la matriz de difracción que aparece en la expresión anterior.

De (4.10) puede deducirse inmediatamente otra expresión de uso frecuente:

$$\bar{E}_d = \underline{D} \bar{E}_i A(s) e^{-jks}$$

donde  $D$  es el coeficiente de difracción diádico:

$$\underline{D} = -(\bar{\beta}_0' \cdot \bar{\beta}_0) D_s - (\bar{\Phi}_0' \cdot \bar{\Phi}_0) D_h$$

En consecuencia, cuando una onda electromagnética incide sobre una cuña, la polarización del campo difractado es función de la del incidente a través de los coeficientes de difracción  $D_s$  y  $D_h$  deducidos para  $E_z^d$  y  $H_z^d$ , considerando los referenciales anteriormente definidos.

#### IV.2.- COEFICIENTES DE DIFRACCION UNIFORMES PARA EL BORDE RECTO DE UNA CUÑA DE CARAS PLANAS.

En este apartado se expondrá un desarrollo matemático para determinar el campo electromagnético en un punto del espacio en presencia de una cuña formada por la intersección de dos caras planas, diferente del empleado por Keller.

El desarrollo, debido a Kouyoumjian y colaboradores [18] y [19], es asimismo asintótico y conducirá a unos coeficientes

de difracción  $D_s$  y  $D_h$  que serán uniformemente válidos en toda la región exterior de la cuña, incluidos los límites de sombra y reflexión y sus proximidades. Por esta razón, dichos coeficientes se llamarán uniformes.

Para deducir  $D_s$  ( $D_h$ ) se considerará el problema canónico de la difracción en cuña en el caso de que la onda incidente sea plana y transporte un campo con polarización eléctrica (o magnética) paralela al borde de la cuña.

#### IV.2.1.- ONDA PLANA INCIDENTE CON POLARIZACION ELECTRICA PARALELA AL BORDE DE UNA CUÑA.

El problema canónico es equivalente al generado por una corriente que se desplaza a lo largo de una recta paralela al borde, a una distancia  $s'$  del mismo y determinando un azimut  $\phi'_0$  (véase el referencial descrito a continuación), respecto a una de las caras de la cuña. Si se asocia una onda plana a dicha corriente, la  $s'$  correspondiente deberá ser infinita.

En este estudio se elegirá, como eje  $z$ , el borde recto de la cuña y, como eje  $x$ , uno situado sobre uno de los planos que la forman. En estas condiciones, las caras de la cuña quedarán determinadas por los dos ángulos azimutales  $\phi_0=0$  y  $\phi_0=n\pi$ . En la figura IV.3 se representa esta situación, en la que el ángulo diedro interno de la cuña será:

$$\nu = (2 - n)\pi$$

El campo eléctrico asociado a la onda incidente, del problema considerado, es paralelo al borde, por lo que, el campo eléctrico total, solo tendrá componente  $z$  y el problema tendrá carácter bidimensional.

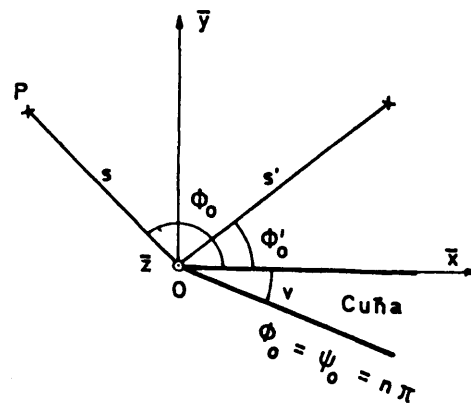


Fig. IV.3 - Referencial elegido para el estudio de la cuña.

En estas condiciones, dicho campo  $E_z$ , es solución de la ecuación de ondas escalar, en un medio homogéneo e isótropo y en la región libre de fuentes:

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$

que, en coordenadas cilíndricas y teniendo en cuenta que  $E_z$  es independiente de  $z$ , se escribe:

$$\left[ \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + k^2 \right] E_z = 0 \quad (4.1)$$

para resolver esta ecuación puede intentarse el método de separación de variables, buscando una solución de la forma:

$$E_z = \sum_{N=0}^{\infty} \psi_N(\phi_0, \phi'_0) R_N(s, s') \quad (4.2)$$

Esta función del punto  $P(\phi_0, s)$  y del manantial  $(\phi', s')$  será solución de (4.11) y deberá verificar las condiciones:

- 1º)  $E_z = 0$  sobre las caras de la cuña ( $\phi_0 = 0$  y  $\phi_0 = n$ ) ;
- 2º)  $E_z$  debe ser finito en  $s=0$  y en  $s=\infty$  ;
- 3º)  $E_z$  debe ser continuo en  $s=s'$  y
- 4º) Sobre el elemento de corriente, debe verificarse la condición límite:

$$H_{\phi}^{+} - H_{\phi}^{-} = J_z \quad (\text{en } s=s')$$

siendo  $H_{\phi}^{+}$  y  $H_{\phi}^{-}$  los valores de la componente  $\phi$  del campo magnético en  $s=s' + \Delta$  y  $s=s' - \Delta$  ( $\Delta$  es un incremento muy pequeño) y  $J_z$  la densidad de corriente a lo largo del filamento que actúa como manantial.

En estas condiciones, sustituyendo (4.12) en (4.11) se deducen las siguientes ecuaciones:

$$s \frac{d}{ds} \left( s \frac{dR_N}{ds} \right) + [(ks)^2 - \nu^2] R = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2 \psi_N}{d\phi_0^2} + \nu^2 \psi_N = 0$$

que pueden resolverse independientemente.

La primera de ellas es una ecuación de Bessel cuya solución, si debe verificar la 2ª) condición, tendrá la forma:

$$R_N(s, s') = b_N J_{\nu}(ks) H_{\nu}^{(2)}(ks') \quad \text{para } s < s'$$

$$R_N(s, s') = b_N J_{\nu}(ks') H_{\nu}^{(2)}(ks) \quad \text{para } s > s' \quad (4.14)$$

donde  $J_v$  es la función de Bessel de primera especie de orden  $v$  y  $H_v^{(2)}$ , la función de Hankel de segunda especie de orden  $v$ .

En cuanto a la segunda, la solución será del tipo:

$$\psi_N(\phi_0, \phi'_0) = A_N \sin v_N \phi_0 \sin v_N \phi'_0 \quad (4.15)$$

Si se impone la 1ª) condición queda determinada la constante

$$v_N = N\pi/\psi_0$$

que será el correspondiente orden  $v$  de las funciones de Bessel y Hankel anteriormente mencionadas.

Sustituyendo (4.13) y (4.14) en (4.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} E_z^- &= \sum_{N=0}^{\infty} [b_N J_{v_N}(ks) H_{v_N}^{(2)}(ks')] [A_N \sin v_N \phi_0 \sin v_N \phi'_0] \text{ para } s < s' \\ E_z^+ &= \sum_{N=0}^{\infty} [b_N J_{v_N}(ks) H_{v_N}^{(2)}(ks)] [A_N \sin v_N \phi_0 \sin v_N \phi'_0] \text{ para } s > s' \end{aligned} \quad (4.16)$$

que verifica la condición 3ª) de continuidad

$$E_z^- = E_z^+ \text{ en } s = s'$$

en virtud de la simetría formal entre  $s$  y  $s'$ .

La determinación de las constantes  $A_N$  y  $b_N$  puede hacerse de la siguiente manera.

En primer lugar, teniendo en cuenta la ecuación de Maxwell:  $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$ , la condición 4ª) equivale a:

$$\frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial E_z^+}{\partial s} - \frac{\partial E_z^-}{\partial s} \right) = j_z \text{ para } s = s'$$

y, teniendo en cuenta (4.16), el primer miembro se transforma en:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{kb_N}{j\omega\mu} [A_N \text{sen } v_N \Phi_0 \text{sen } v_N \Phi'_0] [J_{v_N}(ks') H_{v_N}^{(2)}(ks') - J'_{v_N}(ks') H_{v_N}^{(2)}(ks')]$$

pero, el segundo paréntesis cuadrado es el wronskiano de las funciones de Bessel, que es igual a  $2/j\pi ks'$ , con lo que

$$-\frac{2b}{\omega\mu\pi s'} \sum_{N=0}^{\infty} A_N \text{sen } v_N \Phi_0 \text{sen } v_N \Phi'_0 = j_z \quad \text{para } s = s' \quad (4.17)$$

Ahora bien, el sumatorio de la fórmula anterior está extendido desde  $N=0$  a  $N=\infty$ , por lo que es pues una serie de Fourier y la constante  $A_N$  podrá determinarse mediante la siguiente normalización:

$$A_N \int_0^{\psi_0} \text{sen } v_N \Phi_0 \text{sen } v_N \Phi'_0 d\Phi_0 = A_N \int_0^{\psi_0} \text{sen}^2 v_N \Phi_0 d\Phi_0 = A_N \frac{\psi_0}{2} = 1$$

con lo que el sumatorio equivale a:

$$\frac{2}{\psi_0} \sum_{N=0}^{\infty} \text{sen } v_N \Phi_0 \text{sen } v_N \Phi'_0 = \delta(\Phi_0 - \Phi'_0)$$

siendo  $\delta(\Phi_0 - \Phi'_0)$  la función de Dirac, igual a 1 para  $\Phi_0 = \Phi'_0$  y 0 para  $\Phi_0 \neq \Phi'_0$ .

Por otra parte, si  $I$  es la corriente del filamento, para  $s=s'$  se verificará:

$$j_z = \frac{1}{s'} \delta(\Phi_0 - \Phi'_0)$$

En consecuencia, de (4.17) se deducirá finalmente:

$$b = -\frac{\omega\mu\pi}{2} I \quad (4.18)$$

Si, en estas condiciones, se sitúa el filamento a gran distancia del borde ( $s < s'$ ), la onda incidente pasa a ser plana y puede emplearse la expresión asintótica de

$$H_v^{(2)}(k s') = \sqrt{\frac{2j}{\pi k s'}} j^v e^{-j k s'}$$

Entonces, la primera de (4.16) se transforma en

$$E_z = \frac{2\pi}{\psi_0} \left[ \frac{\omega \mu l}{4} \sqrt{\frac{2j}{\pi k s'}} e^{-j k s'} \right] \sum_{N=0}^{\infty} \epsilon_{v_N} j_{v_N}^{v_N}(k s) j_{v_N}^{v_N} \text{sen } v_N \Phi_0 \text{sen } v_N \Phi'_0 \quad (4.19)$$

Por otra parte, puede demostrarse que el campo eléctrico creado por una onda plana incidente en un punto  $P(s, \phi_0)$  viene dado por [20]

$$E_z^i = \left[ -\frac{\omega \mu l}{4} \sqrt{\frac{2j}{\pi k s'}} e^{-j k s'} \right] e^{j k s \cos(\Phi_0 - \Phi'_0)}$$

donde el paréntesis cuadrado, amplitud  $E_0$  de dicho campo, coincide con el que aparece en (4.19); en consecuencia (4.19) se simplifica en:

$$E_z = \frac{2\pi E_0}{\psi_0} \sum_{N=0}^{\infty} \epsilon_{v_N} j_{v_N}^{v_N}(k s) \text{sen } v_N \Phi_0 \text{sen } v_N \Phi'_0 \quad (4.20)$$

donde  $\epsilon_{v_N}$  es el número de Newman: igual a 1 para  $v_N=0$  e igual a 2 para  $v_N > 0$ .

#### IV.2.2.- EXPRESION INTEGRAL DEL CAMPO DIFRACTADO

La expresión (4.20) puede utilizarse en cálculo numérico para determinar el campo total  $E_z$ ; sin embargo, la convergencia de la serie del paréntesis cuadrado es muy lenta para valores elevados de  $ks$ , por lo que es conveniente deducir otra formula-

ción más práctica.

Para ello obsérvese, en primer lugar, que (4.20) admite una descomposición del tipo:

$$I = I_- - I_+$$

donde, por simplificación, se ha sustituido  $E_z$  por  $I$ .

En efecto, el producto de senos equivale a la diferencia de cosenos, con lo que:

$$I_{\mp} = \frac{\pi}{\psi_0} \sum_{N=0}^{\infty} \epsilon_{v_N} j^{v_N} J_{v_N}(ks) \cos v_N \psi_{\mp}$$

siendo

$$\psi_{\mp} = \phi_0 \mp \phi'_0$$

y en la que, para simplificar el desarrollo, se ha supuesto que  $E_0=1$ .

Sustituyendo  $J_{v_N}(ks)$  por su forma integral [21]:

$$J_{v_N}(ks) = \frac{1}{2\pi} \int_c e^{-jks \sin \theta} e^{jv_N \theta} d\theta$$

donde el contorno de integración  $c$  es el de la figura IV.4, se obtiene:

$$I_{\mp} = \frac{1}{2\pi} \int_c e^{-jks \sin \theta} G_{\mp}(\theta) d\theta$$

con

$$G_{\mp}(\theta) = \frac{\pi}{\psi_0} \sum_{N=0}^{\infty} \epsilon_{v_N} j^{v_N} \cos v_N \psi_{\mp} e^{jv_N \theta}$$



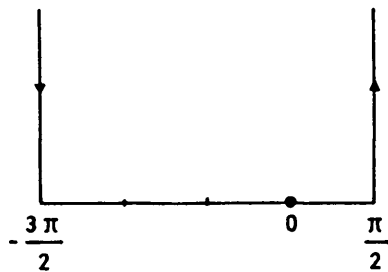


Fig. IV.4.- Contorno de integración  $c$ , en el plano complejo  $\theta$ .

Ahora bien, con el cambio de variable

$$\xi = \theta + \pi/2$$

$G_{\mp}(\theta)$  se transforma en:

$$G_{\mp}(\xi) = \frac{\pi}{\psi_0} \left( 1 + 2 \sum_{N=1}^{\infty} e^{j v_N \xi} \cos v_N \psi_{\mp} \right)$$

Si, a continuación, se hace el nuevo cambio de variable:

$$p = e^{j \pi \xi / \psi_0}$$

y recordando que

$$v_N = N \pi / \psi_0$$

se obtiene:

$$G_{\mp}(p) = \frac{\pi}{\psi_0} \left( 1 + 2 \sum_{N=1}^{\infty} p^N \cos N \kappa_{\mp} \right)$$

siendo

$$\kappa_{\mp} = \frac{\pi \psi_{\mp}}{\psi_0}$$

Pero de [26] se deduce que, para  $|p| < 1$ :

$$1 + 2 \sum_{N=1}^{\infty} p^N \cos N\kappa_{\mp} = \frac{p - p^{-1}}{2 \cos \kappa_{\mp} - (p + p^{-1})} \quad (4.21)$$

y teniendo en cuenta que  $\psi_0 = n\pi$ , se obtiene finalmente:

$$G_{\mp}(\xi) = \frac{j}{n} \left( \frac{\sin \xi/n}{\cos \psi_{\mp}/n - \cos \xi/n} \right)$$

Conocida esta función, puede expresarse la integral  $I_{\mp}$  de la siguiente manera:

$$I_{\mp} = \frac{1}{2\pi j n} \int_{j\infty - \pi}^{j\infty + \pi} \frac{e^{jks \cos \xi} \sin \frac{\xi}{n}}{\cos \frac{\xi}{n} - \cos \frac{\psi_{\mp}}{n}} d\xi \quad (4.22)$$

Obsérvese que el contorno de esta integral -en el plano  $\xi$ - está definido por el señalado en la figura IV.5.a).

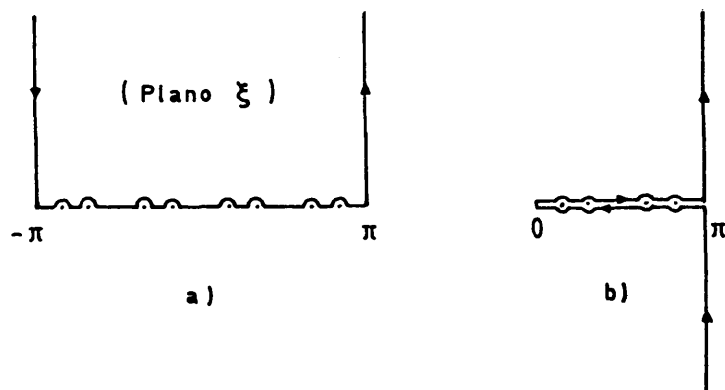


Fig. IV.5. - Contornos en el plano complejo  $\xi$

Ahora bien, como esta integral está definida en el campo complejo:  $\xi = \xi_1 + j\xi_2$ , de modo que:

$$p = e^{-\xi_2/n} j \xi_1/n$$

Pero la integración a lo largo del contorno indicado en la figura

IV.5.a) verifica  $\xi_2 = \text{Im}(\xi) > 0$ , de donde se deduce que  $|p| < 1$  y, por lo tanto, son válidos, no solo la suma efectuada en (4.21), sino también la expresión (4.22) deducida a partir de (4.21).

En estas condiciones, la determinación de las  $I_{\pm}$  a lo largo de un contorno que elude los polos de (4.22), exige la aplicación del teorema de los residuos de Cauchy.

Para ello obsérvese, en primer lugar, que los polos de (4.22), de primer orden, se sitúan a lo largo del eje real del plano  $\xi$ , en los puntos definidos por

$$\xi = 2\pi nN \pm \psi_{\mp}$$

siendo

$$N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Además, en relación con los límites de integración

$$I_{\pm} = \int_0^{j\infty + \pi} + \int_{j\infty - \pi}^0$$

Pero es posible limitar el campo de variación de  $\xi$  a:  $0 < \text{real}(\xi) < \infty$  lo que equivale a tomar como contorno de integración el representado en la figura IV.5.b). Eso exige cambiar de signo los límites de integración y  $\xi$  por  $-\xi$  en el integrando de la segunda integral, con lo que (4.22) se transforma en:

$$I_{\mp} = \frac{1}{2\pi j n} \int_{-j\infty + \pi}^{j\infty + \pi} \frac{e^{jks \cos \xi} \operatorname{sen} \frac{\xi}{n}}{\cos \frac{\xi}{n} - \cos \frac{\psi_{\mp}}{n}} d\xi + \Delta_{\mp}$$

donde  $\Delta_{\mp}$  representa la contribución de los residuos en los polos comprendidos entre 0 y  $\pi$ .

Puede demostrarse que el valor de dichos residuos [11] es:

$$\Delta_{\mp} = \sum_{N_{\mp}} e^{jks \cos(\psi_{\mp} + 2\pi n N_{\mp})} \quad (4.23)$$

tomando  $N_{\mp}$  los valores enteros (incluido el cero) positivos o negativos que verifican:

$$|\psi_{\mp} + 2\pi n N_{\mp}| < \pi$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la descomposición inicial  $I = I_{-} - I_{+}$ , el campo total podrá ponerse en la forma:

$$E_z = u_i - u_r + (u_d^i - u_d^r)$$

siendo

$$u_i = \Delta_{-}; \quad u_r = \Delta_{+} \quad (4.24)$$

y

$$u_d^{i,r} = \frac{1}{2\pi j n} \int_{-j\infty + \pi}^{j\infty + \pi} \frac{e^{jks \cos \xi} \operatorname{sen} \frac{\xi}{n}}{\cos \frac{\xi}{n} - \cos \frac{\psi_{\mp}}{n}} d\xi$$

La contribución de los campos incidente y reflejado serán los sumandos  $u_i$  y  $-u_r$  procedentes del cálculo de residuos (4.23), mientras que la del campo difractado será la debida a la superposición de los  $u_d^i$  y  $-u_d^r$  de la tercera expresión de (4.24).

#### IV.2.3.- DESARROLLO ASINTOTICO DEL CAMPO DIFRACTADO

Las expresiones (4.20) y (4.24) no han exigido ninguna aproximación, por lo tanto, son fórmulas que dan el valor teórico exacto del campo  $E_z$ . En realidad la tercera de (4.24) es una transformación de (4.20) que presenta la misma dificultad que esta; su lenta convergencia. Sin embargo, el nuevo formalismo va a facilitar la obtención de una expresión asintótica mucho más apta para el cálculo numérico.

Para llegar a ese desarrollo asintótico será necesario hacer algunas modificaciones.

En primer lugar, si en la tercera de (4.24) se introduce el cambio de variable:

$$\xi' = \xi - \pi$$

se obtiene:

$$u_d^{i,r} = \frac{1}{2\pi j n} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{-jks \cos \xi'} \sin \frac{\xi' + \pi}{n}}{\cos \frac{\xi' + \pi}{n} - \cos \frac{\psi_{\mp}}{n}} d\xi'$$

En segundo lugar, aplicando la identidad:

$$\cot(x+y) + \cot(x-y) = \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{\cos 2y - \cos 2x}$$

la expresión anterior se transforma en:

$$u_d^{i,r} = f(\psi_+) + f(-\psi_+)$$

siendo

$$f(\pm\psi_+) = - \frac{1}{4\pi j n} \int_{-j\infty}^{j\infty} e^{-jk s \cos \xi'} \cot \frac{\xi' + \pi \left\{ \pm \right\} \psi_+}{2 n} d\xi' \quad (4.25)$$

Finalmente, la determinación de esta integral se va a realizar siguiendo el método de Pauli-Clemmow [15], [16], que consiste en calcularla recorriendo el contorno, con puntos extremos en el infinito, a lo largo del cual el integrando varía más rápidamente.

Una consideración previa es la de que la propagación en el medio que rodea la cuña se haga sin pérdidas, es decir, que  $k$  sea real. En estas condiciones, el problema se reduce a calcular una integral del tipo:

$$\int_c h(\xi') e^{jkg(\xi')} d\xi'$$

en la que  $h(\xi')$  y  $g(\xi')$  son funciones regulares de la variable compleja  $\xi'$ .

Por lo tanto, el término exponencial de (4.25) será:

$$e^{-jk \cos \xi'} = e^{-k s \operatorname{sen} \xi'_1 \operatorname{sh} \xi'_2} e^{-jk s \cos \xi'_1 \operatorname{ch} \xi'_2}$$

cuya fase deberá mantenerse constante a lo largo de la vía de integración definida entonces por:

$$\begin{aligned} \cos \xi'_1 \operatorname{ch} \xi'_2 &= \text{cte} \\ \operatorname{sen} \xi'_1 \operatorname{sh} \xi'_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

que conduce a caminos de máxima variación de la amplitud de

$$e^{-jks \cos \xi'} \quad (4.27)$$

Como  $|\cos \xi'_1| \leq 1$  y  $|\operatorname{ch} \xi'_2| \gg 1$ , la única posibilidad de que se verifique la primera de (4.26) es que el camino  $\Gamma$  que definen dichas expresiones, corte a los ejes en el origen  $\xi'_0(0,0)$ , con lo que el valor de dicha constante será necesariamente la unidad.

Además, a lo largo de  $\Gamma$ , y en virtud de la segunda de (4.26), (4.27) debe tender a cero cuando  $ks$  sea elevado.

Por lo tanto, la mayor contribución a la integral considerada, se obtendrá en las proximidades del origen; puede pues hacerse razonablemente la aproximación de limitar la integración a esa región. El origen es un punto de silla de la función de las dos variables  $\xi'_1$  y  $\xi'_2$  (partes real e imaginaria de  $\xi'$ ), puesto que la derivada  $g'(\xi'_0)$  es nula en él sin que dicho punto sea máximo ni mínimo.

Ahora bien, el integrando de (4.25), correspondiente a  $f(\psi_{\mp})$ , puede ponerse de la forma:

$$dw = \frac{f_s(\xi') A_{\mp}(\xi') d\xi'}{j[a(\psi_{\mp}) - 2 \operatorname{sen} \frac{2\xi'}{2}]}$$

donde:

$$f_s(\xi') = e^{-jks \cos \xi'}$$

$$A_{\mp}(\xi') = j[a(\psi_{\mp}) - 2 \operatorname{sen} \frac{2\xi'}{2}] \cot\left(\frac{\xi' + \pi + \psi_{\mp}}{2n}\right) \quad (4.28)$$

$$a(\psi_{\mp}) = 2 \cos^2\left(\frac{2n\pi N - \psi_{\mp}}{2}\right)$$

Puede demostrarse [11] que haciendo el cambio

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{j}} \operatorname{sen} \frac{\xi'}{2}$$

el camino de máxima pendiente del plano  $\zeta'$  se transforma en el eje real del plano complejo  $\zeta$ , con lo que los límites de integración sobre  $\zeta$  serán  $-\infty, \infty$ . Entonces, en las proximidades del punto de silla se verifican:

$$\xi' \approx 0; \zeta \approx 0; \operatorname{sen} \frac{\xi'}{2} \approx \frac{\xi'}{2} \quad \text{y} \quad \xi'^2 = 2j\zeta^2$$

en consecuencia, haciendo las operaciones necesarias, se demuestra fácilmente que el conjunto (4.28) se simplifica en el:

$$\begin{aligned} f_s(\xi') &\longrightarrow e^{-jks} e^{-ks\zeta^2} \\ A_{\mp}(\xi') d\xi' &\longrightarrow j\sqrt{2j} a(\psi_{\mp}) \cot\left(\frac{\pi+\psi_{\mp}}{2n}\right) d\zeta \\ j[a(\psi_{\mp}) - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\xi'}{2}] &\longrightarrow \zeta^2 + ja(\psi_{\mp}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Las expresiones anteriores transforman  $f_s(\xi')$  en  $f_s(\zeta)$  y  $A_{\mp}(\xi')$  en  $A_{\mp}(\zeta)$ , habiendo tomado para  $A_{\mp}(\zeta)$  el primer término de su desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de silla  $\zeta=0$ , y las funciones  $f(\psi_{\mp})$  de (4.25) se transforman en:

$$f(\psi_{\mp}) = -\frac{\sqrt{2j}}{4\pi n} \sqrt{a(\psi_{\mp})} \cot\left(\frac{\pi+\psi_{\mp}}{2n}\right) e^{-jks} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{a(\psi_{\mp})} e^{-ks\zeta^2} d\zeta}{\zeta^2 + ja(\psi_{\mp})}$$

Pero la integral que aparece en la expresión anterior es igual a [11], [15]:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \mathcal{K}[\sqrt{ksa(\psi_{\mp})}] e^{jksa(\psi_{\mp})} e^{j\pi/4}$$



donde  $\mathcal{F}(x)$  es la integral de Fresnel:

$$\mathcal{F}(x) = \int_x^{\infty} e^{-j\tau^2} d\tau$$

con lo que:

$$f(\psi_{\mp}) = -\frac{\sqrt{2j} \sqrt{a(\psi_{\mp})}}{2n\sqrt{\pi}} \mathcal{F}[\sqrt{ksa(\psi_{\mp})}] e^{jksa(\psi_{\mp})} \cot\left(\frac{\pi+\psi_{\mp}}{2n}\right) e^{-jks}$$

Finalmente, introduciendo en ella la función de transición de Kouyoumjian [19]:

$$F(x) = 2j\sqrt{x} e^{jx} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{e^{-j\tau^2}}{\sqrt{x}} d\tau \quad (4.30)$$

se obtiene:

$$f(\psi_{\mp}) = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cot\left(\frac{\pi+\psi_{\mp}}{2n}\right) F[ksa(\psi_{\mp})] \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \quad (4.31)$$

Las funciones  $f(-\psi_{\mp})$  se obtienen de manera análoga, sustituyendo -recuérdese (4.25)-  $\psi_{\mp}$  por  $-\psi_{\mp}$ , siendo ahora el punto de silla

$$\xi'_0 = -2\pi$$

Con estos resultados, de (4.24) se deduce que la componente  $u_d^i - u_d^r$ , campo difractado, en el caso de polarización eléctrica paralela al borde es:

$$E_d = -\frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \cot\left(\frac{\pi+\psi_-}{2n}\right) F[ksa^+(\psi_-)] + \cot\left(\frac{\pi-\psi_-}{2n}\right) F[ksa^-(\psi_-)] - \cot\left(\frac{\pi+\psi_+}{2n}\right) F[ksa^+(\psi_+)] - \cot\left(\frac{\pi-\psi_+}{2n}\right) F[ksa^-(\psi_+)] \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \quad (4.32)$$

donde el significado de los superíndices que aparecen en la función  $a(\psi_{\pm})$  se explicará más adelante.

#### IV.2.4.- COEFICIENTES DE DIFRACCION $D_s$ PARA UNA ONDA PLANA QUE INCIDE NORMALMENTE AL BORDE.

Si se aplica (3.21) al caso de una onda plana ( $\rho_{\text{e}}^i=0$ ) y de un borde recto ( $\rho_{\text{b}}=0$ ), la distancia cáustica  $\rho$  se hace infinita y

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\rho}{s(s+\rho)}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

Por otra parte,  $\bar{E}_1(0)=1$ , con lo que comparando (4.32) y (3.20) se deduce:

$$D_s = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \cot\left(\frac{\pi+\psi_-}{2n}\right) F[ksa^+(\psi_-)] + \cot\left(\frac{\pi-\psi_-}{2n}\right) F[ksa^-(\psi_-)] - \right. \\ \left. \cot\left(\frac{\pi+\psi_+}{2n}\right) F[ksa^+(\psi_+)] - \cot\left(\frac{\pi-\psi_+}{2n}\right) F[ksa^-(\psi_+)] \right\} \quad (4.33)$$

con

$$a^{\pm}(\psi_{\mp}) = 1 + \cos(2n\pi N^{\pm} - \psi_{\mp}) = 2\cos^2\left(\frac{2n\pi N^{\pm} - \psi_{\mp}}{2}\right) \quad (4.34)$$

donde los superíndices de la función  $a(\psi_{\pm})$  van asociados a los del entero  $N^{\pm}$ .

En estas condiciones, se puede describir el comportamiento de la cuña sobre el campo en las proximidades de los límites de sombra y reflexión correspondientes a ambas caras, desde el punto de vista de la UTD. En esa descripción se analizará el significado de cada uno de los términos que aparecen en (4.33) y en (4.34).

Para ello, supóngase una cuña como la de la figura IV.6, donde, como siempre, las caras que la forman quedan definidas por los ángulos  $\phi_0=0$  y  $\phi_0=n\pi$ .

La prolongación de dichas caras en el espacio libre determinará en él tres regiones: A, B y C, donde se va a considerar sucesivamente el rayo incidente sobre el borde de la cuña que quedará definido por el correspondiente  $\phi'_0$ .

En la zona A, los únicos límites posibles son los de reflexión y sombra correspondientes a la cara 1 ( $\phi_0=0$ ), determinados por los azimuts  $\pi-\phi'_0$  y  $\pi+\phi'_0$  respectivamente.

Para el primero,  $(\pi-\phi_+)/2n=0$ , con lo cual la cuarta cotangente de (4.33) se hace infinita y, por consiguiente, la función F correspondiente debe resolver esa singularidad.

Teniendo en cuenta que el argumento de dicha función es:

$$ks a^-(\psi_+) = ks [1 + \cos(2n\pi N^- - \psi_+)]$$

esa superposición exige, como veremos a continuación, la anulación de  $a^-(\psi_+)$ ; es decir, que se verifique:

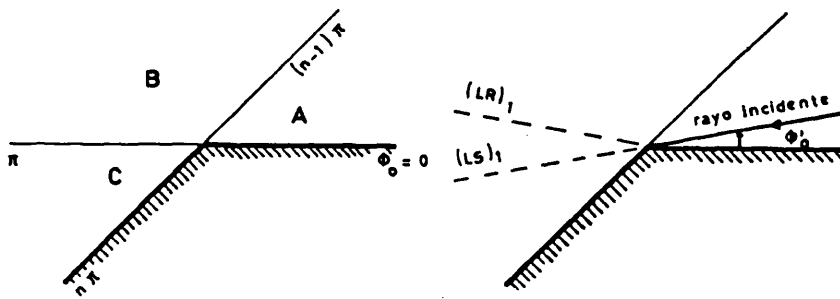
$$2n\pi N^- - \psi_+ = -\pi$$

Pero, en este caso,  $\psi_+=\pi$ , con lo que el valor mejor de  $N^-$  que lo verifique será

$$N^- = 0$$

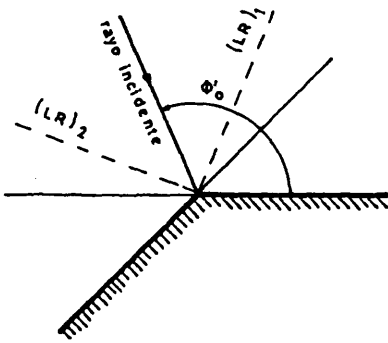
Ahora bien, en las proximidades de este límite, el argumento de F(x) deberá ser casi cero, por lo que podrá aplicarse la forma simplificada de F(x) para valores pequeños de x:

$$F(x) = (\sqrt{\pi x} - 2x e^{j\pi/4}) e^{j\pi/4} e^{jx}$$



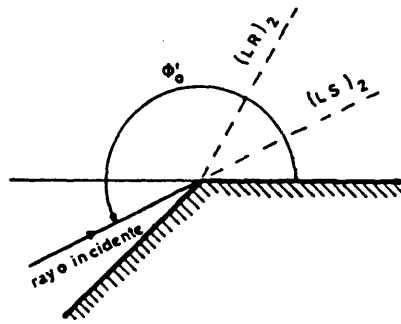
ZONA A

$$\begin{aligned}\phi_0[(LR)_1] &= \pi - \phi'_0 : \frac{\pi - \psi_0}{2n} = 0 \\ \phi_0[(LS)_1] &= \pi + \phi'_0 : \frac{\pi - \psi_-}{2n} = 0\end{aligned}$$



ZONA B

$$\begin{aligned}\phi_0[(LR)_1] &= \pi - \phi'_0 : \frac{\pi - \psi_0}{2n} = 0 \\ \phi_0[(LR)_2] &= (2n-1)\pi - \phi'_0 : \frac{\pi + \psi_0}{2n} = \pi\end{aligned}$$



ZONA C

$$\begin{aligned}\phi_0[(LR)_2] &= (2n-1)\pi - \phi'_0 : \frac{\pi + \psi_0}{2n} = \pi \\ \phi_0[(LS)_2] &= \phi'_0 - \pi : \frac{\pi + \psi_-}{2n} = 0\end{aligned}$$

Fig. IV.6.- Límites de reflexión y sombra en una cuña

por otra parte, en dicha región:

$$2n\pi N^- - \psi_+ = -\pi + \epsilon$$

siendo  $\epsilon > 0$  ( $\epsilon < 0$ ) en la región iluminada (sombreada) del rayo reflejado; en consecuencia:

$$x = ksa^-(\psi_+) \approx \frac{ks\epsilon^2}{2}$$

$$\cot\left(\frac{\pi - \psi_+}{2n}\right) \approx \frac{2n}{\epsilon}$$

con lo que

$$\cot\left(\frac{\pi - \psi_+}{2n}\right) F[ksa^-(\psi_+)] = n[\sqrt{2\pi ks} \operatorname{signo}(\epsilon) - 2ks\epsilon e^{j\pi/4}] e^{j\pi/4} \quad (4.35)$$

siendo  $\operatorname{signo}(\epsilon) = 1, (-1)$  para  $\epsilon > 0, (\epsilon < 0)$ .

Por lo tanto, la expresión (4.35), que es finita para  $\epsilon \neq 0$ , sustituida en (4.32) nos muestra que en las proximidades del límite el campo difractado es finito y discontinuo. La discontinuidad viene dada por el término en  $\operatorname{signo}(\epsilon)$  de (4.35). Además, sobre el límite óptico considerado, el campo total es continuo. En efecto: a un lado y otro del límite óptico, e infinitamente próximo al mismo, el campo reflejado puede escribirse como:

$$u_z^r = -\frac{1}{2}(1 + \operatorname{signo}(\epsilon))$$

cuyo término discontinuo es:  $-\frac{1}{2} \operatorname{signo}(\epsilon)$ .

El correspondiente término discontinuo del campo difractado, resultante de sustituir (4.35) en (4.32) es  $\frac{1}{2} \operatorname{signo}(\epsilon)$ , que es igual y de signo contrario al término discontinuo del campo reflejado. Por lo tanto, el campo total:

$$u_z^i + u_z^r + u_z^d$$

es continuo y finito sobre dicho límite, lo cual es una de las aportaciones de la UTD.

El mismo razonamiento hecho para este límite puede repetirse para el segundo de la zona A y para los restantes de las zonas B y C. En la figura IV.6, se recogen los valores de  $\phi_0$  que definen dichos límites y los que conducen a las singularidades de la cotangente correspondiente a los mismos.

Sin embargo, será interesante completar esa información con la de los valores óptimos de N que anulan la respectiva a  $\pm(\phi_{\pm})$ :

- (LR)<sub>1</sub> - Límite de reflexión (1ª cara).- 4º término.-  $N^- = 0$
- (LR)<sub>2</sub> - Límite de reflexión (2ª cara).- 3º término.-  $N^+ = 1$
- (LS)<sub>1</sub> - Límite de sombra (1ª cara).- 2º término.-  $N^- = 0$
- (LS)<sub>2</sub> - Límite de sombra (2ª cara).- 1º término.-  $N^+ = 0$

Hay que subrayar que, siendo  $N^+$  y  $N^-$  los enteros que mejor satisfacen

$$\begin{aligned} 2n\pi N^+ - \psi_{\mp} &= \pi \\ 2n\pi N^- - \psi_{\mp} &= -\pi \end{aligned} \quad (4.36)$$

$N^+$  puede tomar los valores 0 y 1, mientras que  $N^-$  también puede valer -1. Sin embargo, fácilmente puede verse que sobre un límite de sombra valen cero, salvo cuando dicho límite coincida con una de las caras de la cuña.

Por otra parte, la función de transición  $F(x)$  presenta las siguientes expresiones asintóticas:

$$\begin{aligned} F(x) &= (\sqrt{\pi x} - 2x e^{j\pi/4} - \frac{2}{3} x^2 e^{-j\pi/4}) e^{j\pi/4} e^{jx}; \quad x \ll 1 \\ F(x) &= 1 + j \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} - j \frac{15}{8} \frac{1}{x^3} + \frac{75}{16} \frac{1}{x^4}; \quad 3 < x < 10 \\ F(x) &\approx 1; \quad \text{para} \quad x > 10 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Por consiguiente, cuando se está lejos de los límites de sombra y reflexión ( $k s a^{\pm}(\psi_{\mp}) > 10$ ), (4.33) se transforma en la  $D_s$  deducida por Keller y que aparece en el apartado III.2.3.4.

#### IV.2.5.- COEFICIENTE DE DIFRACCION $D_H$ PARA UNA ONDA PLANA QUE INCIDE NORMALMENTE AL BORDE.

Si se considera ahora un filamento lineal de corriente magnética paralela al borde de una cuña y se hacen consideraciones análogas a IV.2.1, pero para  $H_z$  en lugar de  $E_z$  y con la condición límite sobre las caras de la cuña:

$$E_s = 0 \quad \left( \text{o } \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \right) \quad \text{en } \Phi = 0 \text{ y } \Phi = n\pi$$

con

$$E_s = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{s} \frac{\partial H_z}{\partial \Phi}$$

se obtiene una expresión para  $H_z$ , dual de la (4.16) donde habrá que sustituir los sen por los cos [20].

Particularizando para el caso de onda plana, se deduce la siguiente expresión del campo total

$$H_z = \frac{2\pi H_0}{\psi_0} \sum_{N=0}^{\infty} \epsilon_{V_N} j^{V_N} J_{V_N}(ks) \cos V_N \Phi_0 \cos V_N \Phi_0'$$

De modo análogo al desarrollo hecho en IV.2.2 se llegaría a un campo total:

$$H_z = u_i + u_r + u_d^i + u_d^r$$

de la que se obtendría un campo difractado como el de (4.32); es decir un coeficiente de difracción  $D_H$ :

$$D_h = - \frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \cot\left(\frac{\pi + \psi_-}{2n}\right) F[ksa^+(\psi_-)] + \right. \\ \cot\left(\frac{\pi - \psi_-}{2n}\right) F[ksa^-(\psi_-)] + \\ \cot\left(\frac{\pi + \psi_+}{2n}\right) F[ksa^+(\psi_+)] + \\ \left. \cot\left(\frac{\pi - \psi_+}{2n}\right) F[ksa^-(\psi_+)] \right\} \quad (4.38)$$

análoga a la (4.33), salvo que ahora todos los signos son +.

Evidentemente, cuando el campo se calcula lejos de los límites de sombra y reflexión ( $F[ksa^{\pm}(\psi_{\pm})] = 1$ ) este coeficiente se transforma en el  $D_h$  de Keller.

#### IV.2.6.- COEFICIENTES DE DIFRACCION PARA UNA ONDA PLANA CON INCIDENCIA OBLICUA AL BORDE DE LA CUÑA. MATRIZ DE DIFRACCION.

Cuando una onda plana incide oblicuamente sobre el borde, formando el rayo incidente un ángulo  $\beta_0$  con la tangente al borde en el punto de contacto (Fig. III.5), da lugar a un campo incidente, cuya componente  $z$  es [20]:

$$E_z^i(H_z^i) = e^{jk\rho \sin \beta_0 \cos \psi_-} e^{-jkz \cos \beta_0}$$

según sea la polarización considerada eléctrica (magnética). En esta expresión se ha tomado amplitud, unidad y fase nula en el punto de contacto (origen) y todas las restantes magnitudes tienen el significado dado hasta ahora.

El problema es análogo al resuelto para el caso de polarización eléctrica paralela al borde, salvo que ahora habrá que sustituir  $K$  por  $K \sin \beta_0$  y multiplicar la expresión por



$$e^{-jkz \cos \beta_0}$$

Por lo tanto, para calcular la componente  $z$  del campo difractado, habrá que sustituir el argumento  $x$  que aparece en la función de transición  $F(x_{\pm})$  de (4.31) por

$$x_{\pm} = k s a(\psi_{\pm}) \sin \beta_0$$

Asimismo, en esa misma expresión habrá que dividir por  $\sin \beta_0$  y sustituir el factor exponencial por

$$e^{-jk(\rho \sin \beta_0 + z \cos \beta_0)} = e^{-jks}$$

con lo que quedará como expresión general de los coeficientes de difracción escalares  $D_s$  y  $D_h$ , válida para cualquier ángulo de incidencia  $\beta_0$  de la onda plana:

$$\begin{Bmatrix} D_s \\ D_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h(\psi_-) + h(-\psi_-) \\ h(\psi_+) + h(-\psi_+) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

siendo

$$h(\psi_{\pm}) = - \frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \cot\left(\frac{\pi + \psi_{\pm}}{2n}\right) F[kLa^+(\psi_{\pm})]$$

$$h(-\psi_{\pm}) = - \frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \cot\left(\frac{\pi - \psi_{\pm}}{2n}\right) F[kLa^-(\psi_{\pm})]$$

El parámetro de distancia  $L$  (tiene dimensiones de longitud) será comentado más extensamente en el siguiente apartado. En el caso de onda plana, vale como se acaba de indicar:

$$L = s \sin \beta_0 \quad (4.40)$$

Los coeficientes  $D_s$  y  $D_h$  determinados por (4.39) corresponden a los elementos de la matriz de difracción definida en (4.10) que transforma el campo incidente  $(E_{\beta_0}^i, E_{\phi_0}^i)$  en el difractado  $(E_{\beta_0}^d, E_{\phi_0}^d)$ .

Lejos de los límites ópticos ( $F(x) \approx 1$ ), la solución anterior se reduce a la dada por Keller como puede verse comparando (4.39) con la expresión deducida en el apartado III.2.3.4.

El campo difractado se comporta entonces como el originado por una fuente lineal, situada a lo largo del borde, que da lugar a conos de rayos difractados de semiángulo  $\beta_0$ , cuyos vértices se sitúan a lo largo del borde. La onda difractada es una onda cónica, tal como había deducido Keller, que degenera en una onda cilíndrica cuando  $\beta_0 = \pi/2$ .

#### IV.2.7.- MATRIZ DE DIFRACCIÓN UNIFORME PARA UNA ONDA ARBITRARIA INCIDENTE SOBRE UNA CUÑA PLANA.

Aplicando el segundo postulado de Keller, los resultados anteriores, relativos al campo difractado, pueden extenderse a cualquier campo de óptica geométrica  $\vec{E}^i$  incidente sobre la cuña. Ello exige que se verifiquen las condiciones dadas en IV.1 y, como se verá a continuación, que se modifiquen el factor de divergencia,  $A(s)$ , y el parámetro de distancia,  $L$ , de forma que el campo resultante (superposición de los incidente, reflejado y difractado) sea continuo en los límites ópticos.

Para llegar a esta conclusión, recuérdese en primer lugar (3.17) en la que se obtienen las componentes del campo reflejado  $E_{||}^r, E_{\perp}^r$  en función de las incidentes  $E_{||}^i, E_{\perp}^i$  (definidas ambas parejas en III.1.4.2). En (3.17) aparecen además los factores de divergencia:

$$f(s) = \sqrt{\frac{\varphi_1^r \varphi_2^r}{(\varphi_1^r + s)(\varphi_2^r + s)}} \quad (4.41)$$

y fase:  $e^{-jks}$  relativos al punto de observación que dista  $s$  del origen  $O$ .

En consecuencia, dicha relación puede repetirse aquí

$$\bar{E}^r = \langle\langle R \rangle\rangle \bar{E}^i(s) e^{-jks} \quad (4.42)$$

forma simplificada de (3.17).

Recordando los referenciales  $(s', \beta'_0, \phi'_0)$ ,  $(s, \beta_0, \phi_0)$  definidos en IV.1, puede demostrarse fácilmente que la relación entre el campo incidente  $\bar{E}^i$  en el primer sistema de referenciales y el  $\bar{E}^{i'}$  en el segundo viene dada por

$$\bar{E}^{i'} = \langle\langle T \rangle\rangle(-\alpha) \bar{E}^i$$

siendo

$$\langle\langle T \rangle\rangle(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

con  $-\alpha$ , ángulo diedro que forman los planos de incidencia ordinario (determinado por el rayo incidente y la normal  $\hat{n}$  al plano reflector) y el ligado al borde (determinado por el rayo incidente y el borde, fig. IV.7).

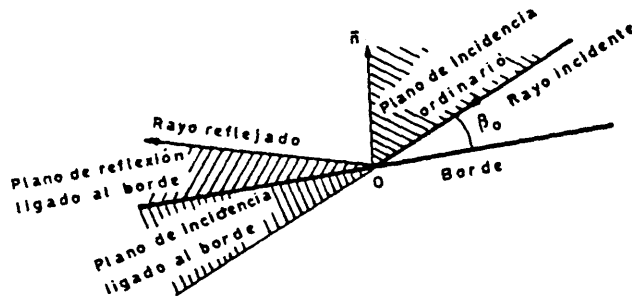


Fig. IV.7 - Planos de incidencia y reflexión ligados al borde.

Si se considera la situación en las proximidades del límite de reflexión; en la parte iluminada por el rayo reflejado vale (4.42), mientras que en la parte oscura:  $\bar{E}^r=0$ . Ambas situaciones pueden ser descritas por la expresión única:

$$\bar{E}^r = \langle\langle R \rangle\rangle \bar{E}^i f(s) H(\epsilon) e^{-jks} \quad (4.43)$$

donde  $H(\epsilon)$  es la función Heaviside:

$$H(\epsilon) = \frac{1}{2} [1 + \text{signo}(\epsilon)]; \quad H(\epsilon) = \begin{cases} 1; \epsilon \geq 0 \\ 0; \epsilon < 0 \end{cases}$$

Ahora bien, si se multiplica por la izquierda ambos miembros de (4.43) por la matriz  $\langle\langle T \rangle\rangle$  (a) se obtiene:

$$\langle\langle T \rangle\rangle(\alpha) \bar{E}^r = [\langle\langle T \rangle\rangle(\alpha) \langle\langle R \rangle\rangle \langle\langle T \rangle\rangle(-\alpha)^{-1}] [\langle\langle T \rangle\rangle(-\alpha) \bar{E}^i] f(s) H(\epsilon) e^{-jks}$$

pero, según se acaba de indicar:

$$\langle\langle T \rangle\rangle(\alpha) \bar{E}^r = \begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^r \\ E_{\phi_0}^r \end{Bmatrix}; \quad \langle\langle T \rangle\rangle(-\alpha) \bar{E}^i = \begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\phi_0}^i \end{Bmatrix}$$

por otra parte, del cálculo matricial se sabe que

$$\langle\langle T \rangle\rangle(\alpha) \langle\langle R \rangle\rangle \langle\langle T \rangle\rangle(-\alpha)^{-1} = \langle\langle R \rangle\rangle$$

en consecuencia, la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^r \\ E_{\phi_0}^r \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\phi_0}^i \end{Bmatrix} f(s) [1 + \text{signo}(\epsilon)] e^{-jks} \quad (4.44)$$

que da el campo reflejado en ambos lados del límite de reflexión. Una vez más se subrayará el carácter discontinuo de dicho campo ( $\text{signo}(\epsilon)$  lo es) al cruzar dicho límite ( $\epsilon$  pasa de ser positivo a negativo).

Para que el campo total sea continuo al cruzar dicho límite, el rayo difractado deberá compensar esa discontinuidad. Así por ejemplo, si el límite de reflexión considerado fuera el correspondiente a la cara B de la cuña la compensación procederá del término  $h(\psi_+)$  de (4.39) que, teniendo en cuenta la parte principal de (4.35), conduce a una matriz de difracción, cuya parte discontinua es:

$$((D)) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{\sin \beta_0} \text{signo}(\varepsilon)$$

Si se sustituye  $s$  por el parámetro de distancia  $L_2^r$  correspondiente a  $h(\psi_+)$  -límite de reflexión  $(LR)_2$ - la parte discontinua del campo difractado será:

$$\begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^d \\ E_{\Phi_0}^d \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\Phi_0}^i \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{L_2^r}}{\sin \beta_0} \sqrt{\frac{\varphi}{s(s+\varphi)}} e^{-jks} \text{signo}(\varepsilon) \quad (4.45)$$

Este parámetro de distancia es un grado de libertad que permite realizar la necesaria compensación; por consiguiente, la suma de la parte discontinua de (4.44) y (4.45) deberá anularse; es decir:

$$-\frac{\sqrt{L_2^r}}{\sin \beta_0} \sqrt{\frac{\varphi}{s(s+\varphi)}} + f(s) = 0$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$L_2^r = \frac{s(\varphi+s) \varphi_1^r \varphi_2^r \sin^2 \beta_0}{\varphi (\varphi_1^r + s) (\varphi_2^r + s)} \quad (4.46)$$

siendo (recuérdese III.1.4.2.c)  $\varphi_1^r$  y  $\varphi_2^r$  los radios de curvatura

principales del frente de onda reflejado. Sin embargo, si se particulariza al caso de un borde recto:

$$\rho_B \rightarrow \infty \text{ en (3.21), con lo que } \rho = \rho_e^j.$$

Por otro lado, si en las expresiones (3.16) de III.1.4.2 se introducen los radios de curvatura principales de la superficie reflectora -cara plana-  $R_1=R_2=\infty$ , se obtienen:

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0; f_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi_1^i} + \frac{1}{\varphi_2^i} \right); f_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi_1^i} - \frac{1}{\varphi_2^i} \right)$$

con lo que

$$\begin{Bmatrix} 1/\varphi_1^r \\ 1/\varphi_2^r \end{Bmatrix} = f_0 \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} f_1 = \begin{Bmatrix} 1/\varphi_1^i \\ 1/\varphi_2^i \end{Bmatrix}$$

deduciéndose finalmente:

$$L_2^r = \frac{s(\varphi_e^i + s)\varphi_1^i\varphi_2^i \sin^2 \beta_0}{\varphi_e^i(\varphi_1^i + s)(\varphi_2^i + s)} \quad (4.47)$$

De modo análogo, se obtendría el parámetro distancia correspondiente al límite de reflexión de la cara A:  $L_1^r$ .

Repitiendo este mismo proceso para un límite de sombra se llega a

$$\begin{Bmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\phi_0}^i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_{\beta_0'}^i \\ E_{\phi_0'}^i \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{\varphi_1^i \varphi_2^i}{(\varphi_1^i + s)(\varphi_2^i + s)}} [1 + \text{signo}(\epsilon)] e^{-jks} \quad (4.48)$$

donde  $E_{\beta_0}^i$  y  $E_{\phi_0}^i$  son las componentes del campo incidente, tomadas sobre el plano de difracción ligado al borde y a una distancia  $s$

de 0.

En cuanto al campo difractado habrá que considerar ahora el término  $h(\psi_-)$  o el  $h(-\psi_-)$  de (4.39) con lo que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} E_{\beta_0}^d \\ E_{\phi_0}^d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\phi_0}^i \end{pmatrix} \frac{\sqrt{L_1^i}}{\sin \beta_0} \sqrt{\frac{\varphi}{s(s+\varphi)}} e^{-jks} \operatorname{signo}(\varepsilon)$$

que sumada a la parte discontinua de (4.48) debe ser cero. Esta compensación será posible cuando

$$L_1^i = \frac{s(\varphi+s) \varphi_1^i \varphi_2^i \sin^2 \beta_0}{\varphi(\varphi_1^i+s)(\varphi_2^i+s)} \quad (4.49)$$

y haciendo las mismas consideraciones anteriores sobre el caso particular de la cuña plana, se deduce

$$L_1^i = \frac{s(\varphi_e^i+s) \varphi_1^i \varphi_2^i \sin^2 \beta_0}{\varphi_e^i(\varphi_1^i+s)(\varphi_2^i+s)} = L_2^i = L_1^r = L_2^r \quad (4.50)$$

que es el parámetro de distancia generalizado para cualquier tipo de onda incidente sobre la cuña de caras planas.

En resumen, en el caso general de una onda incidente cualquiera que incide sobre el borde de una cuña de caras planas con un ángulo  $\beta_0$ , el campo difractado viene dado por (4.10), donde  $D_s$  y  $D_h$  se calculan con (4.39) y en la que  $L$  se determina con (4.50).

#### IV.3.- REDUCCION DE LA SOLUCION GENERAL U.T.D. DE DIFRACCION EN CUÑA PLANA A LOS CASOS CANONICOS.

Si se considera el caso particular de una onda plana:

- 91 -

$$\varphi_e^i = \varphi_1^i = \varphi_2^i = \infty$$

que incide normalmente sobre el borde de la cuña:

$$\beta_0 = 90^\circ$$

la expresión (4.49) se transforma en

$$L = L_1^i = L_2^i = L_1^r = L_2^r = s$$

y la (4.10) en:

$$\begin{Bmatrix} E_z^d \\ H_z^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_s \\ D_h \end{Bmatrix} A(s) e^{-jks} \begin{Bmatrix} E_z^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

con  $A(s)=1/\sqrt{s}$  y los coeficientes  $D_s$  y  $D_h$  dados por (4.39), en la que  $\beta_0$  y  $L$  son los valores anteriormente citados.

Si consideramos el caso concreto de la fig. IV.3 en el que la onda plana incidente sobre la cuña solo ilumina la cara  $\phi=0$ , los límites de sombra y reflexión quedan definidos por  $\psi_{\pm}=\pi$  respectivamente.

En estas condiciones, el entero  $N^{\pm}$  de (4.34) debe ser cero; por consiguiente:

$$a^{\pm}(\psi_{\pm}) = 2 \cos^2 \frac{\psi_{\pm}}{2}$$

y

$$h(\psi_{\pm}) + h(-\psi_{\pm}) = -\frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \cot\left(\frac{\pi+\psi_{\pm}}{2n}\right) + \cot\left(\frac{\pi-\psi_{\pm}}{2n}\right) \right\} F(2ks \cos^2 \frac{\psi_{\pm}}{2})$$



Utilizando la notación de Pauli [15] y teniendo en cuenta estas últimas expresiones, (4.51) puede ponerse en la forma:

$$\begin{pmatrix} E_z^d \\ H_z^d \end{pmatrix} = v_B(s, \psi_-) \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} v_B(s, \psi_+) \quad (4.52)$$

en el supuesto de que, en el origen, la amplitud del campo sea la unidad; su fase, nula y siendo:

$$v_B(s, \psi_{\pm}) = \frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \frac{2 \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi_{\pm}}{n}} F(2ks \cos^2 \frac{\psi_{\pm}}{2}) \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}}$$

Si se sustituye en esta última fórmula,  $F(x)$  por su definición, (4.30), se tendrá:

$$v_B(s, \psi_{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{j\pi/4} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \frac{2 |\cos \frac{\psi_{\pm}}{2}| e^{jks \cos \psi_{\pm}}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi_{\pm}}{n}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-j\tau^2} d\tau}{\sqrt{ksa(\psi_{\pm})}} \quad (4.53)$$

que coincide con el término fundamental del desarrollo en serie de Pauli [15] para el campo difractado en el caso concreto de cuña y que, sustituido en (4.52) da el campo  $E_z^d$  ( $H_z^d$ ).

Lejos de los límites de sombra y reflexión:

$$F[2ks \cos^2(\psi_{\pm}/2)] \approx 1$$

con lo que:

$$v_B(s, \psi_{\pm}) = \frac{(2\pi ks)^{-1/2} e^{-j(ks + \pi/4)} n^{-1} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi_{\pm}}{n}}$$

que es el resultado obtenido por Pauli en dicha situación cuando se toman términos hasta el orden  $k^{-\frac{1}{2}}$ . Esta última expresión es válida para cualquier incidencia siempre que el campo difractado se calcule lejos de los límites ópticos.

Por otra parte, si (4.53) se particulariza para el caso del semiplano ( $n=2$ ), se obtiene:

$$v_B(s, \psi_{\pm}) = -e^{j\pi/4} [2/\pi a(\psi_{\pm})] e^{jks \cos \psi_{\pm}} \cos \frac{\psi_{\pm}}{2} \int_{\sqrt{ks} a(\psi_{\pm})}^{\infty} \frac{e^{-j\tau^2}}{\tau} d\tau \quad (4.54)$$

con 
$$a(\psi_{\pm}) = 2 \cos^2 \frac{\psi_{\pm}}{2}$$

que coincide con la solución de Sommerfeld en notación de Pauli, quien demostró que la solución del semiplano es un caso particular de la serie dada por él para la cuña. Dicha serie se reduce al primer término que coincide con (4.54).

Por su parte, Mittra y Rahmat-Samii [23], utilizando la teoría espectral, obtienen también el resultado exacto de Sommerfeld (coincidente con el de la UTD para este caso) para una onda plana incidente en un semiplano. Incluso en el caso de una onda cilíndrica arbitraria, [24], con polarización eléctrica paralela al borde, dichos autores obtienen una solución para el campo difractado que concuerda, en su parte fundamental, con la solución UTD particularizada para dicho caso, siempre que el campo emitido por el manantial varíe lentamente en las proximidades del punto de difracción.

#### IV.4.- CONDICIONES DE VALIDEZ Y GRADO DE APROXIMACION DE LA UTD

Las condiciones de validez se refieren por una parte al tipo de cuña que actúa como obstáculo y, por otra, a las hipótesis relativas a la señal incidente.

En primer lugar, hay algunas cuñas para las que  $D_s$  y  $D_h$  son nulos, con lo que no tiene sentido el proceso hasta ahora establecido.

En efecto, escribiendo (4.39) para zonas alejadas de los límites ópticos de sombra y reflexión:

$$F[kL a^{\pm}(\psi_{\pm})] \approx 1 \quad (4.55)$$

$$\begin{Bmatrix} D_s \\ D_h \end{Bmatrix} = \frac{e^{-j\pi/4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{n\sqrt{2\pi k} \operatorname{sen} \beta_0} \left[ \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi_-}{n}} \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi_+}{n}} \right]$$

donde  $D_s$  y  $D_h$  se anulan para  $n=1$ ; es decir, cuando la cuña degenera en un plano completo, lo cual es evidente porque, en estas condiciones, no existe borde. Pero también se hace

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = 0$$

cuando  $n=1/M$ , siendo  $M=2,3,\dots$ . Estas cuñas presentan un ángulo interno:

$$\nu = \left(2 - \frac{1}{M}\right)\pi > \pi$$

en cuyo caso, el campo total se compone del rayo directo y de un número finito de campos reflejados. En consecuencia, las cuñas para las que el campo difractado es parte significativa del campo total son las que tienen una  $n$  que cumple

$$1 < n \leq 2$$

Por otro lado,  $0 \leq \phi'_0 \leq n\pi$  es el intervalo posible de ángulos de incidencia. Las situaciones límites:  $\phi'_0=0$  y  $\phi'_0=n\pi$  corresponden a incidencias rasantes a las caras que forman la cuña. Para ellas, (4.39) da  $D_s=0$  y  $D_h \neq 0$ ; sin embargo, el campo incidente que debe ser considerado es la mitad del campo emitido por el ma-

nantial (rasante a la cara), puesto que la otra mitad corresponde al campo reflejado. Por lo tanto si se considera de modo general que el campo incidente sobre el borde es el que efectivamente llega a él procedente del manantial, deberá tomarse  $D_h = \frac{1}{2}$  del  $D_h$  deducido de (4.39) y, naturalmente,  $D_g = 0$ .

En lo relativo a la señal incidente, los coeficientes de difracción deducidos de (4.39) serán válidos solo cuando la señal tenga un comportamiento de rayo óptico y cuando  $kL$  sea suficientemente elevado, lo que implica, (4.49), que  $s'$ ,  $s$  y  $s_0$  no sean demasiado pequeños.

Finalmente, obsérvese que fuera de los límites de sombra y reflexión, (4.39) es del orden  $k^{-\frac{1}{2}}$  respecto al campo incidente, mientras que sobre dichos límites es del orden  $k^0$  (recuérdese que la expresión asintótica de  $F(x)$  en dichos límites es  $\approx \sqrt{\pi ks/2}$ ); es decir, del mismo orden de magnitud que el campo de óptica geométrica correspondiente (rayos incidente o reflejado).

Entre estas dos situaciones que, como se verá, definen el intervalo

$$0 < kLa^{\frac{1}{2}}(\psi_{\pm}) < 10$$

se sitúa la denominada zona de transición del campo difractado, donde hay que evaluar  $F(x)$  sin las aproximaciones asintóticas mencionadas.

La solución UTD, cuyo campo total incluye términos hasta de orden  $k^{-\frac{1}{2}}$  respecto al campo incidente, se denominará solución de primer orden de la UTD.

#### IV.5.- SOLUCION UTD PARA LA DIFRACCION EN CUÑA CURVADA

En este apartado se va a dar la solución UTD al problema general de difracción en borde curvo, interacción de dos superfi-

cies genéricas. Esta solución es válida para los dos casos particulares: a) cuando una de las dos superficies sea plana y b) cuando ambas superficies, no planas, sean coincidentes. En este caso, el borde curvo corresponde al de una superficie no plana con doble cara.

#### IV.5.1.- COEFICIENTES DE DIFRACCION EN BORDE CURVO

En este caso, la construcción de la solución para el campo difractado está basada en la obtenida para la cuña de caras planas. Para ello se puede aplicar el segundo postulado de Keller para alta frecuencia y, en consecuencia, aproximar el borde curvo en el punto de difracción por el de la cuña recta cuyas caras planas sean los planos tangentes, en el punto de difracción, a las superficies que forman el borde curvo. En estas condiciones, se podrán aplicar los resultados obtenidos en los apartados anteriores con el factor de divergencia  $A(s)$  modificado por la curvatura  $\rho_B$  del borde curvo y con el parámetro de distancia  $L$  adecuado para que queden compensadas las discontinuidades en los dos límites ópticos.

Además, esta solución será válida únicamente en la región exterior de la cuña, entendiendo por tal la comprendida entre los planos tangentes a las superficies en el punto de difracción; quedan pues excluidos no solo los puntos situados entre dichos planos y las superficies sino también los pertenecientes a los planos tangentes (Fig. IV.1). Tanto la incidencia como la salida rasante (o sus proximidades) no deberán ser considerados.

En estas condiciones, los coeficientes de difracción serán los de (4.39); es decir:

$$\begin{pmatrix} D_s \\ D_h \end{pmatrix} = - \frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left[ \cot \left( \frac{\pi + \psi_-}{2n} \right) F[kL^i a^+(\psi_-)] + \cot \left( \frac{\pi - \psi_-}{2n} \right) F[kL^i a^-(\psi_-)] \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} + \cot \left( \frac{\pi + \psi_+}{2n} \right) F[kL_2^r a^+(\psi_+)] \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} + \cot \left( \frac{\pi - \psi_+}{2n} \right) F[kL_1^r a^-(\psi_+)] \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \right] \quad (4.56)$$

donde, como siempre,  $\psi_{\pm} = \phi_0 \mp \phi'_0$  con los ángulos  $\phi_0$  y  $\phi'_0$  definidos en la figura IV.1;  $n$  es el parámetro que determina el azimuth del plano tangente  $B$  a la segunda superficie en el punto de difracción;  $\beta_0$  es el ángulo formado por el rayo incidente  $\bar{s}'$  y el borde  $\bar{t}$  en el punto de difracción y  $L^i$ ,  $L_1^r$ ,  $L_2^r$  tres parámetros distancia ligados: el primero al límite de sombra y los otros dos a los dos límites de reflexión (uno para cada superficie).

Son precisamente estos parámetros los que hay que redefinir en este caso general.

En primer lugar, recordando IV.2,  $L^i$  vendrá dado por (3.49), con  $\rho$  dado por (3.21), donde, en este caso, por ser  $\bar{n}_e \cdot \bar{s}' = \bar{n}_e \cdot \bar{s}$ ,  $\rho = \rho_L^i$ . Por consiguiente:

$$L^i = \frac{s(\rho_e^i + s)\rho_1^i \rho_2^i \sin^2 \beta_0}{\rho_e^i (\rho_1^i + s)(\rho_2^i + s)} \quad (4.57)$$

Si el campo se calcula en zona lejana:  $s \gg \rho_L^i$  ( $L=1,2$ ) y (4.57) se simplifica en:

$$L^i = \frac{\rho_1^i \rho_2^i \sin^2 \beta_0}{\rho_e^i}$$

Por otra parte, los parámetros  $L_M^r$  ( $M$  es un índice asociado a los planos tangentes  $A(M=1)$  y  $B(M=2)$ ) vendrán dados -recuérdese (4.46)-por:

$$L_M^r = \frac{s(\rho_M + s) \rho_{1M}^r \rho_{2M}^r \sin^2 \beta_0}{\rho_M (\rho_{1M}^r + s)(\rho_{2M}^r + s)} \quad (4.58)$$

En este caso, como hay dos límites de reflexión: uno  $(LR)_1$  para la cara  $A$  y otro  $(LR)_2$  para la  $B$ , los frentes de onda reflejados correspondientes al punto de difracción tendrán dos curvaturas principales:  $1/\rho_{1M}^r$  y  $1/\rho_{2M}^r$ . En cuanto a  $\rho_M$  es la distancia cáustica dada por (3.21); para el límite  $(LR)_1$ :  $\phi_0 = \pi - \phi'_0$  y  $(LR)_2$ :  $\phi_0 = (2n-1)\pi - \phi'_0$ . Para calcular  $\rho_M$  en función de parámetros conocidos, recuérdese que, en la reflexión se verifica:

$$\bar{s} = \bar{s}' - 2(\bar{n}_M \cdot \bar{s}') \bar{n}_M$$

siendo  $\bar{s}'$  y  $\bar{s}$  los vectores unitarios correspondientes a los rayos incidente y reflejado respectivamente y  $\bar{n}_M$  el correspondiente a la normal a la superficie reflectora en el punto de reflexión; por consiguiente, se podrá sustituir el término  $\bar{n}_e \cdot \bar{s}' - \bar{n}_e \cdot \bar{s}$  de (3.21) por su igual  $2(\bar{n}_M \cdot \bar{s}') (\bar{n}_M \cdot \bar{n}_e)$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{1}{\rho_M} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{2(\bar{n}_M \cdot \bar{n}_e)(\bar{n}_M \cdot \bar{s}')}{\rho_B \sin^2 \beta_0} \quad (4.59)$$

Volviendo de nuevo a los coeficientes de difracción y teniendo en cuenta la exclusión de rayos rasante,  $N^\pm$  solo puede tomar el valor cero sobre un límite de sombra, con lo que de (4.34) se deduce:

$$a^\pm(\psi_-) = 2 \cos^2 \frac{\psi_-}{2} = a(\psi_-)$$

simplificándose (4.56) en:

$$\begin{pmatrix} D_s \\ D_h \end{pmatrix} = \frac{e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k \sin\beta_0}} \left[ \frac{2 \sin \frac{\pi}{n} F[k L^i a(\psi_-)]}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi_-}{n}} \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \right. \\ \left. \cot \left( \frac{\pi + \psi_+}{2n} \right) F[k L_2^r a^+(\psi_+)] \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \right. \\ \left. \cot \left( \frac{\pi - \psi_+}{2n} \right) F[k L_1^r a^-(\psi_+)] \right] \quad (4.60)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $N^+$  y  $N^-$  valen 0 y 1 sobre los límites de reflexión  $(LR)_1$  y  $(LR)_2$  respectivamente, se tienen:

$$a^-(\psi_+) = a^-(\psi_-) = 2 \cos^2(\psi_+/2) \quad y$$

$$a^+(\psi_+) = 2 \cos^2[(2n\pi - \psi_+)/2]$$

En resumen, para una onda electromagnética incidente sobre la cuña curva con polarización arbitraria y comportamiento de rayo óptico, los coeficientes de difracción  $D_s$  y  $D_h$  vienen dados por (4.60) con lo que queda determinada la matriz de difracción ((D)) y se puede calcular el campo difractado a partir de (4.10).

#### IV.5.1.1.- Difracción en borde curvo cuando una de las superficies es plana.

En este caso, la simplificación debida a ser plana una de las superficies que forman el borde se reduce a la de las curvaturas principales del frente de onda reflejado correspondiente al límite de reflexión del plano en cuestión. Si éste se asocia con  $M=1$  por ejemplo,



$$\varphi_{11}^r = \varphi_1^i \quad y \quad \varphi_{21}^r = \varphi_2^i$$

según se puede deducir fácilmente de (3.15) y (3.16) donde  $1/R_1 = 1/R_2 = 0$  y, por consiguiente:  $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ , quedando:

$$\begin{Bmatrix} 1/\varphi_1^r \\ 1/\varphi_2^r \end{Bmatrix} = f_0 \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} f_1 = \begin{Bmatrix} 1/\varphi_1^i \\ 1/\varphi_2^i \end{Bmatrix}$$

#### IV.5.1.2.- Difracción en borde curvo de una superficie.

El caso del borde curvo de una superficie puede considerarse como una situación particular de una cuña curva formada por dos superficies coincidentes; es decir, el que corresponde a:

$$n = 2$$

$$a^+(\psi_{\pm}) = a^-(\psi_{\pm}) = a(\psi_{\pm}) = 2 \cos^2 \frac{\psi_{\pm}}{2}$$

$$L_1^r = L_2^r = L^r$$

con lo que (4.60) se simplifica en:

$$\begin{Bmatrix} D_s \\ D_h \end{Bmatrix} = - \frac{e^{-j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \left[ \frac{F[kL^i a(\psi_-)]}{\cos \frac{\psi_-}{2}} \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \frac{F[kL^r a(\psi_+)]}{\cos \frac{\psi_+}{2}} \right] \quad (4.61)$$

con  $L^i$  deducido de (4.57) y  $L^r$  de (4.58) donde:

$$\varphi_{11}^r = \varphi_{12}^r = \varphi_1^r \quad y \quad \varphi_{21}^r = \varphi_{22}^r = \varphi_2^r$$

y  $\rho_M$  de (4.59) con  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2$  que es el vector unitario normal a la única superficie existente en el punto de difracción.

A su vez, el caso del semiplano es una particularización de esta situación, en la que  $L^i$  coincide con  $L^r$ , deduciéndose ambas de (4.50).

Si este subcaso particular se plantea para una onda incidente plana con polarización eléctrica (magnética) se obtienen las expresiones de  $E_z(H_z)$  de Sommerfeld como ya se expuso en IV.3.

## CAPITULO V

### RESOLUCION DE SINGULARIDADES DE LA UTD

En este capítulo se dan métodos para resolver el problema de las singularidades de la teoría geométrica de la difracción, en los casos en que no se puede aplicar ninguna de sus versiones (GTD, UTD). Dichos casos son, fundamentalmente, los de punto de difracción coincidente o cercano a un vértice, cáusticas de rayos difractados y campo incidente sin comportamiento estricto de rayo óptico.

Las soluciones que aportamos en este capítulo para los dos primeros casos mencionados estan fundamentadas en la integral de corrientes equivalentes a lo largo del borde difractante, deducidas de la distribución de corrientes inducidas en estrechas franjas alrededor del borde.

En el caso singular de no comportamiento de rayo óptico se propone una modificación de la UTD (MUTD), que se basa en una evaluación de segundo orden de la representación integral del campo difractado.

### V.1.- CORRIENTES EQUIVALENTES Y DIFRACCION

Como se apuntó en el apartado II.3.3, el método de las corrientes equivalentes de Ryan y Peters liga el fenómeno de difracción en borde de cuña con unas corrientes ficticias a lo largo del borde difractante. Sin embargo, las expresiones de las corrientes dadas por los autores anteriormente mencionados [27] sólo se justifican en el caso de onda plana con incidencia normal al borde, y en los conos de Keller. Por otro lado, la generalización de dichas corrientes dada por Knotty Senior [43], es un mero postulado.

Así pues, partiendo del concepto de corrientes de franja, utilizadas por Keller [2] y Mittra [23] en el borde de un semiplano, sustituidas en la integral de radiación de (2.1), se obtiene la siguiente expresión del campo difractado lejano:

$$\bar{E}_d = \frac{jk}{4\pi} \int_C \bar{s} \times \left[ \bar{s} \times \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \bar{j}_i(z, x_i) e^{jkx_i \bar{x}_i \bar{s}} dx_i \right] \frac{e^{-jks}}{s} dz \quad (5.1)$$

siendo  $\bar{x}_i$  y  $\bar{s}$  vectores unitarios en la dirección del eje x y de difracción, respectivamente (figura V.1), y  $\bar{j}_i(z, x_i)$  las corrientes inducidas de superficie, en la vecindad de  $x_i = 0$ , en cada cara de la cuña ( $i = 1, 2$ ) y alrededor del borde. C es el contorno del borde.

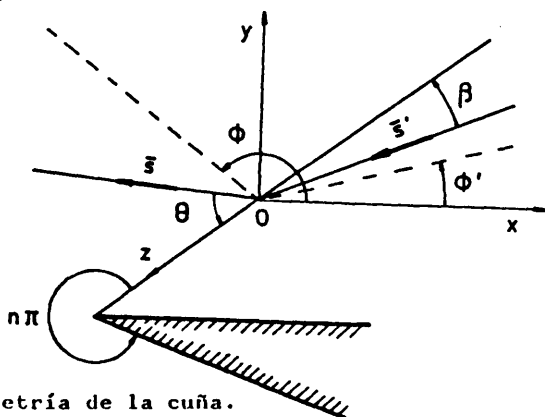


Fig. V.1.- Geometría de la cuña.

Comparando la expresión (5.1) del campo difractado con la (2.6), se obtienen las corrientes equivalentes:

$$\begin{aligned} I^e(z) &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \bar{s} \cdot [(\bar{z} \times \bar{s}) \times \bar{F}_i(z)] \\ I^m(z) &= \sum_{i=1}^2 \frac{Z_0}{\sin^2 \theta} \bar{z} \cdot [\bar{s} \times \bar{F}_i(z)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde

$$\bar{F}_i(z) = \int_0^{\infty} \bar{j}_i(z, x_i) e^{jk x_i \bar{x}_i \cdot \bar{s}} dx_i; \quad (i=1, 2) \quad (5.3)$$

en cuya evaluación asintótica en cada superficie de la cuña solo se considera la contribución del borde en  $x_i = 0$ .

Las corrientes inducidas en las proximidades del borde, se escriben:

$$\bar{j}_i = j_x \bar{x} + j_z \bar{z} \quad (5.4)$$

#### V.1.1.- DEDUCCION DE LAS EXPRESIONES DE LAS CORRIENTES EQUIVALENTES

Sea una onda plana electromagnética incidiendo sobre una cuña conductora infinita. Consideremos la cara 1 de la cuña como la que contiene al eje  $x$  en la figura V.1. Sean  $\phi'$  y  $\phi$  los ángulos azimutales de las direcciones de incidencia y difracción,  $\bar{s}'$  y  $\bar{s}$ , respectivamente, y  $\beta$  y  $\theta$  los ángulos que forman dichas direcciones con el eje polar  $z$ . En dicha figura es evidente que:

$$\bar{s} = \sin \theta \cos \phi \bar{x} + \sin \theta \sin \phi \bar{y} + \cos \theta \bar{z}$$

La corriente de superficie sobre dicha cara vendrá dada por:

$$\vec{j} = \vec{y} \times \vec{H}_{(y=0)}$$

de donde se deduce:

$$j_x = H_z (y=0)$$

$$j_z = -H_x (y=0)$$

con lo que, de (5.2), se obtiene:

$$\begin{aligned} I_1^e &= F_z - F_x \cot \theta \cos \Phi \\ I_1^m &= -F_x Z_0 \sin \Phi / \sin \theta \end{aligned} \quad (5.5)$$

siendo:

$$F_{x,z} = \int_0^{\infty} H_{x,z}(y=0) e^{jkx \sin \theta \cos \Phi} dx$$

Ahora bien, se trata de calcular las corrientes en las proximidades del borde ( $x_i = 0$ ), por lo que dichas corrientes se podrán deducir de las soluciones exactas  $E_z$  y  $H_z$  del problema canónico de difracción de una onda plana que incide oblicuamente en borde de cuña.

Considerando una onda plana incidente en la cuña con polarización  $TM_z$  ( $TE_z$ ), amplitud  $E_z^i$  ( $H_z^i$ ) y fase en el origen cero, el campo total  $E_z$  ( $H_z$ ) es de la forma:

$$E_z(H_z) = E_z^i(H_z^i)(1 + I_+)$$

(5.6)

con  $I_z$  dada por (4.22), en la que el factor exponencial de la integral debe contener las consideraciones de incidencia oblicua (sustituir  $k_s$  por  $k \cos \beta$ , siendo  $\rho$  y  $\phi$  las coordenadas polares del punto del campo en el plano  $xy$ ).

Para una onda plana que incide oblicuamente con polarización arbitraria y dependencia en  $z$  de la forma:

$$e^{-jkz \cos \beta}$$

además de la componente longitudinal de (5.6) existe una componente transversal, que puede deducirse de las ecuaciones de Maxwell [20], para el campo  $H$ :

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right) \bar{H}_t = k_t^2 \bar{H}_t = jk_z \nabla_t H_z - j\omega \epsilon \bar{z} \times \nabla_t E_z$$

siendo:

$$\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{y}$$

$$k_z = k \cos \beta$$

$$k_t = k \sin \beta$$

de donde

$$H_x = \frac{1}{jk \sin^2 \beta} \left( -Y_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} + \cos \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (5.7)$$

en la que  $Y_0$  es la admitancia del medio.

Así pues, de las ecuaciones (5.2) a (5.7), con (4.22) modificada para incidencia oblicua, y considerando la contribución de una sola cara de la cuña, se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned}
 I_1^e &= E_z^i \frac{2jY_0}{k \operatorname{sen}^2 \beta} B + \frac{2H_z^i}{k \operatorname{sen} \beta} (j \cot \beta C - \cot \theta \cos \Phi A) \\
 I_1^m &= -H_z^i \frac{2Z_0 \operatorname{sen} \Phi}{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta} A
 \end{aligned} \quad (5.8)$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\infty} U(X, \Phi') e^{jX\mu_1} dX \\
 B &= \int_0^{\infty} \frac{1}{X} \frac{\partial U(X, \Phi')}{\partial \Phi'} e^{jX\mu_1} dX \\
 C &= \int_0^{\infty} \frac{\partial U(X, \Phi')}{\partial X} e^{jX\mu_1} dX
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

con:

$$\mu_1 = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \Phi}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$X = k\rho \operatorname{sen} \beta$$

donde en los integrandos se ha introducido el valor de la función  $U$  en  $y = 0$  ( $\Phi = 0$ ,  $\rho = x$ ).

Con estas consideraciones, y teniendo en cuenta el desarrollo (4.22), se obtiene:

$$A = \frac{1}{2\pi n} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sen}(\xi/n)}{[\cos(\xi/n) - \cos(\Phi/n)](\cos \xi + \mu_1)} d\xi + j \sum_N \frac{1}{\cos \xi_N + \mu_1} \quad (5.10)$$

donde se ha invertido el orden de integración y se ha integrado respecto de  $X$ .  $\Gamma$  es el contorno deformado de la figura IV.5.b, que elude los polos del integrando. En la integración respecto de  $X$ , sólo se ha considerado la contribución del borde ( $x = 0$ ). Las  $\xi_N$  representan los polos del integrando entre 0 y  $\pi$ , que son raíces de la ecuación:



$$\cos(\xi/n) - \cos(\Phi/n) = 0$$

$\xi = \alpha_1$  es el polo adicional de integración, cuya expresión es:

$$\alpha_1 = \cos^{-1} \mu_1 = -j \ln(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 1}) \quad (5.11)$$

Aplicando nuevamente el teorema de residuos a la integral de (5.10) después de cerrar el contorno de integración en el infinito, se obtiene:

$$A = -\frac{j}{n} \frac{\text{sen}[(\pi - \alpha_1)n]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] - \cos(\Phi/n)} \cdot \frac{1}{\text{sen} \alpha_1} \quad (5.12)$$

De manera similar se calcula la integral B de (5.9), obteniéndose:

$$B = \frac{\cot \alpha_1}{n} \cdot \frac{\text{sen}[(\pi - \alpha_1)/n]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] - \cos(\Phi/n)} \quad (5.13)$$

Finalmente, la integral C se calcula por partes en  $\frac{\partial U}{\partial \Phi}$ , deduciéndose:

$$C = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\text{sen}(\Phi/n)}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] - \cos(\Phi/n)} \quad (5.14)$$

Las expresiones anteriores, sustituidas en (5.8), dan las contribuciones  $I_1^e$  e  $I_1^m$  de la cara 1 a las corrientes equivalentes. Considerando además la contribución de la cara 2, hay que

sumar a (5.8) expresiones análogas en A, B y C, sustituyendo  $\theta$  por  $\pi - \theta$ ,  $\beta$  por  $\pi - \beta$ ,  $\Phi'$  por  $n\pi - \Phi'$  y  $\alpha_1$  por  $\alpha_2 = \cos^{-1} \mu_2$ , siendo:

$$\mu_2 = \frac{\sin \theta \cos(n\pi - \Phi)}{\sin \beta}$$

obteniéndose así:

$$\begin{aligned} I^e = -E_z \frac{2jY(l/n)\sin(\Phi/n)}{k\sin^2 \beta} & \left\{ \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] - \cos(\Phi/n)} + \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_2)/n] + \cos(\Phi/n)} \right\} \\ -H_z \frac{2j(l/n)}{k\sin \beta} & \left\{ \frac{\mu_1 \cot \beta - \cot \theta \cos \Phi}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin[(\pi - \alpha_1)/n]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] - \cos(\Phi/n)} \right. \\ & \left. - \frac{\mu_1 \cot \beta - \cot \theta \cos(n\pi - \Phi)}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin[(\pi - \alpha_2)/n]}{\cos[(\pi - \alpha_2)/n] + \cos(\Phi/n)} \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} I^m = H_z \frac{2jZ(l/n)}{k\sin \theta \sin \beta} & \left\{ \frac{\sin \Phi}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin[(\pi - \alpha_1)/n]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] - \cos(\Phi/n)} \right. \\ & \left. + \frac{\sin(n\pi - \Phi)}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin[(\pi - \alpha_2)/n]}{\cos[(\pi - \alpha_2)/n] + \cos(\Phi/n)} \right\} \end{aligned}$$

Hay que hacer notar que dichas corrientes coinciden con las de Ryan y Peters dadas por (2.7) para  $\beta = \theta = \pi/2$ , y con las de Knott y Senior (ver II.3.3) para  $\beta = \theta$ , es decir, en los conos de Keller, ya que en ambos casos

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \cos \Phi ; & \alpha_1 &= \Phi \\ \mu_2 &= \cos(n\pi - \Phi) ; & \alpha_2 &= n\pi - \Phi \end{aligned}$$

y el término en  $H_z^i$  de  $I^e$  se hace cero.

## V.2.- DIFFRACCION EN CUÑA FINITA

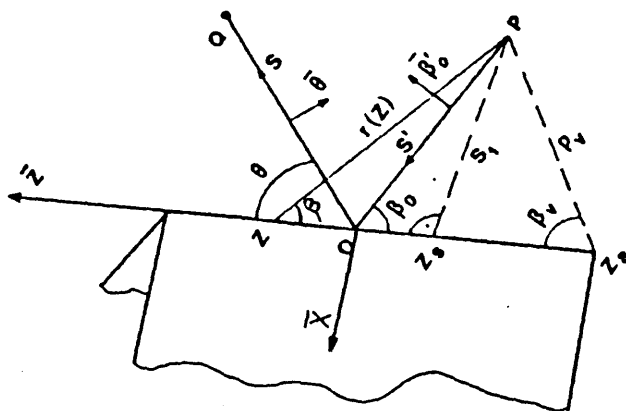


Fig. V.2.- Geometría de cuña truncada.

En el caso de un punto fuente situado en P (figura V.2), de coordenadas cilíndricas  $(s_1, \phi', z_s)$ , las corrientes equivalentes en un punto sobre el borde, de coordenada  $z$ , teniendo en cuenta (4.5) y (4.7) en (5.15), se pueden poner en la forma:

$$\begin{aligned} i^e(z) &= -\frac{e^{-j\pi/4}}{Z_0} \sqrt{\frac{8\pi}{k}} [D_e(\Phi; \Phi, \beta, \theta) E_\beta^i + D_{em}(\Phi; \Phi, \beta, \theta) E_\Phi^i] e^{-jkr(z)} \\ i^m(z) &= -\frac{e^{-j\pi/4}}{Y_0} \sqrt{\frac{8\pi}{k}} D_m(\Phi; \Phi, \beta, \theta) E_\Phi^i e^{-jkr} \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde se ha supuesto que la onda incidente es una onda esférica cuya amplitud varía lentamente con la coordenada  $z$ , siendo  $E_\beta^i$  y  $E_\Phi^i$  las componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia ligado al borde.

Sustituyendo las expresiones de las corrientes de (5.16)

en la integral de radiación (2.6), y suponiendo que la cuña de la figura V.2 es infinita, se obtiene la expresión del campo lejano difractado en borde, que se puede poner en la forma:

$$E_{\theta}^d = \frac{e^{-jks}}{s} j \frac{kZ_0}{4\pi} \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} i^e(z) e^{jkg(z)} dz \quad (5.17)$$

que es la componente paralela al plano de difracción ligado al borde, pudiéndose obtener una expresión análoga para la componente perpendicular  $E_{\phi}^d$ . En (5.17) el origen de fases se toma en el punto de fase estacionaria 0, siendo la función de fase:

$$g(z) = z \cos \theta - r(z) \quad (5.18)$$

con:

$$r(z) = \sqrt{(z - z_s)^2 + s_i^2}$$

La integral de (5.17) es del mismo tipo que la de  $I_0$  en (A4.1) del apéndice AIV, que, en alta frecuencia, se puede aproximar por el método de la fase estacionaria dado en dicho apéndice. En nuestro caso resulta:

$$\begin{aligned} g'(z) &= \cos \theta - \cos \beta \\ g''(z) &= -\sin^2 \beta / r(z) \end{aligned} \quad (5.19)$$

siendo  $\beta = \beta_0$  (punto 0;  $z = 0$ ) el punto de fase estacionaria, el que se verifica:

$$\begin{aligned} g'(0) &= 0 \\ g''(0) &= -\sin^2 \beta_0 / s \end{aligned}$$



Por otro lado, de (5.18):

$$g(0) = -s'$$

y de (5.16):

$$i^e(0) = -\frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{8\pi}{k}} D_s E_{\beta_0}^i e^{jks'} e^{-j\pi/4}$$

con lo que, teniendo en cuenta el desarrollo asintótico de la integral  $I_0$  dado por (A4.6), sustituido en (5.17), resulta:

$$E_{\theta}^d = -D_s E_{\beta_0}^i \sqrt{s'} \frac{e^{-jks}}{s} \quad (5.20)$$

donde  $D_s$  es el coeficiente de difracción de Keller.

Esta última expresión es la ya conocida de la componente paralela al plano de difracción ligado al borde del campo lejano difractado para el caso de onda esférica incidente. De forma análoga se obtiene la componente perpendicular a dicho plano, resultando:

$$E_{\phi}^d = -D_h E_{\phi_0}^i \sqrt{s'} \frac{e^{-jks}}{s} \quad (5.21)$$

#### V.2.1.- DIFRACCION EN VERTICES

Supongamos que la cuña infinita de la figura V.1 se trunca (figura V.2), apareciendo un vértice en  $z = z_a$ . La integral correspondiente de la expresión (5.17) tiene un límite inferior en  $z_a$ , siendo:

$$I_{z_a} = \int_{z_a}^{\infty} i^e(z) e^{jkg(z)} dz$$

que es de la forma de (A4.10) del apéndice AIV, pudiéndose evaluar asintóticamente por el método de la fase estacionaria con contribución de punto extremo, obteniéndose, según (A4.14), la expresión:

$$I_{z_a} = H(-\epsilon_1) I_0 + \epsilon_1 i^e(z_a) e^{jkg(z_a)} e^{jv^2 \sqrt{\frac{2}{k|g''(z_a)|}}} \mathcal{F}_-(v) \quad (5.22)$$

siendo el primer término la contribución del punto de fase estacionaria que, sustituida en (5.17), da el habitual campo difractado en borde de (5.20). El segundo término expresa la contribución del extremo o vértice de dicho borde.

En (5.22)  $H$  es la función de Heaviside definida en el apéndice AIV, siendo  $\epsilon_1 = \text{signo}(z_a - z_0)$ .

Por otro lado, las derivadas de la función de fase en el vértice, según (5.19), son:

$$\begin{aligned} g'(z_a) &= \cos \theta - \cos \beta_v \\ g''(z_a) &= - \frac{\sin^2 \beta_v}{\rho_v} \end{aligned} \quad (5.23)$$

que sustituidas en (A4.16) dan:

$$v = \left| \frac{\cos \theta - \cos \beta_v}{\sin \beta_v} \right| \sqrt{\frac{k \rho_v}{2}} \quad (5.24)$$

donde  $\rho_v$  y  $\beta_v$  son parámetros que definen la posición del vértice

respecto del punto fuente.

Además, en (5.22)  $i^e(z_a)$  se obtiene de (5.16), prescindiendo del factor exponencial y sustituyendo  $\beta$  por  $\beta_v$ .

Así pues, si utilizamos los sistemas de coordenadas ligados a los rayos incidente y difractado en el vértice, tomando como origen de fase dicho vértice, sustituyendo (5.23) y (5.24), con (5.26), en el segundo término de (5.22), que se sustituye a su vez en (5.17), se obtiene:

$$E_{\theta}^v = -D_s^v(\phi_v, \phi, \beta_v, \theta, \rho_v) E_{\beta_v}^i \frac{e^{-jks}}{s} \quad (5.25)$$

#### V.2.1.1.- Coefficiente de difracción en vértice

La expresión (5.25) es la componente paralela al plano de difracción del plano difractado en vértice asociado con un vértice y un borde. Análogamente se obtendría la expresión de la componente perpendicular a dicho plano,  $E_{\phi}^v$ , sustituyendo en (5.25) el coeficiente  $D_s^v$  por el correspondiente  $D_h^v$  y la componente del campo incidente en el vértice  $E_{\beta_v}^i$  por la componente perpendicular  $E_{\phi_v}^i$ , siendo:

$$D_{s,h}^v(\phi_v, \phi, \beta_v, \theta, \rho_v) = \frac{\epsilon_1 e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} D_{e,m}^v(\phi_v, \phi, \beta_v, \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \beta_v} F(v^2) \quad (5.26)$$

donde:

$$D_e^v(\Phi'_v, \Phi, \beta_v, \theta) = - \frac{e^{-j\pi/4} \sin(\Phi'_v/n)}{n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_v} \left\{ \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] - \cos(\Phi'_v/n)} + \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_2)/n] + \cos(\Phi'_v/n)} \right\}$$

$$D_m^v(\Phi'_v, \Phi, \beta_v, \theta) = - \frac{e^{-j\pi/4}}{n\sqrt{2\pi k} \sin \theta} \left\{ \frac{\sin \Phi_v}{\sin \alpha_1} \frac{\sin[(\pi - \alpha_1)/n]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/n] + \cos(\Phi'_v/n)} + \frac{\sin(n\pi - \Phi_v)}{\sin \alpha_2} \frac{\sin[(\pi - \alpha_2)/n]}{\cos[(\pi - \alpha_2)/n] + \cos(\Phi'_v/n)} \right\}$$

F es la función de transición de Kouyoumjian [19],  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  los definidos en (5.11) y (5.15), sustituyendo  $\beta$  y  $\Phi$  por  $\beta_v$  y  $\Phi_v$ , respectivamente.

La expresión (5.26) nos da el coeficiente de difracción asociado a un vértice y un borde. De dicha expresión puede deducirse que lejos de los límites ópticos en el vértice y para puntos de fase estacionaria alejados de dicho vértice, el coeficiente de difracción de (5.26), y según (A4.12), es del orden de  $k^{-1}$  con relación al campo incidente, lo que está de acuerdo con la conclusión de Keller [3] sobre la naturaleza del campo difractado en vértice. El mismo autor obtiene un coeficiente de difracción en vértice diferente del dado en (5.26) para esquinas de aperturas [2], por medio de una evaluación asintótica de la integral de Kirchhoff.

En el caso de que el vértice coincida con un punto de fase estacionaria del borde ( $\beta_v = 0$ ), el coeficiente  $D_{e,m}^v$  de (5.26) coincide con el coeficiente de difracción en borde de Keller, que dado en la forma uniforme de la UTD coincide con el coeficiente  $D_{s,h}$  de (4.56), para  $\beta = \beta_v$ .

Así pues, en los conos de Keller:



$$D_{s,h}^v(\phi_v', \phi_v, \beta_v, \rho_v) = -\frac{1}{2} D_{s,h}(\phi_v, \phi_v', \beta_v) \sqrt{\rho_v}$$

que es uniforme en los límites de sombra y reflexión en el vértice.

### V.3.- CALCULO DEL CAMPO EN LAS CAUSTICAS DE RAYOS DIFRACTADOS

Una de las aplicaciones más importantes del método de las corrientes equivalentes es analizar el campo cerca de las cáusticas de rayos difractados en borde, que se asocian, por ejemplo, a las direcciones axiales de cilindros o paraboloides alimentados en el eje. En dichas situaciones, el eje es una cáustica de rayos difractados en borde, ya que todos los puntos del borde contribuyen al campo difractado en el eje. Cuando el manantial se aleja del eje las cáusticas se mueven en dirección opuesta, dando lugar al desenfoque.

Supongamos el disco circular de la figura V.3 y elijamos un sistema de coordenadas con origen en el centro del disco, 0, de manera que el punto fuente se sitúe en el primer cuadrante del plano

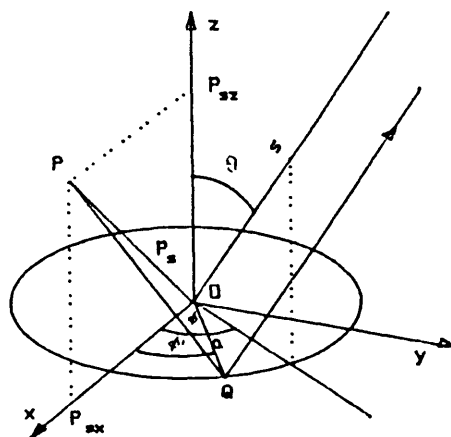


Fig. V.3.- Manantial sobre disco circular.

xz. En la integral de radiación de (2.6) hay que sustituir el elemento de borde por la tangente al mismo en el punto considerado:

$$dz = a d\varphi' \quad (5.27)$$

siendo  $a$  el radio del disco y  $\varphi'$  la variable de integración que es el azimut de un punto del borde. El contorno de integración es el borde del disco.

Así pues, si  $E_{\theta}^i$  y  $E_{\phi}^i$  son las componentes del campo eléctrico incidente en un sistema de coordenadas ligado al rayo, la integral de (2.6) para una dirección de campo lejano  $\theta, \phi$ , es de la forma [44]:

$$\bar{E}(\theta, \varphi) = \frac{e^{-jks}}{s} \int_0^{2\pi} \bar{G}(\varphi') e^{jkg(\varphi')} d\varphi' \quad (5.28)$$

donde  $\bar{G}(\varphi') d\varphi'$  es el resultado de sustituir (5.27) y las corrientes equivalentes de (5.16) en (2.6).

La función de fase, con centro en el origen, es:

$$g(\varphi') = r(\varphi') - a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') \quad (5.29)$$

donde:

$$r(\varphi') = \sqrt{p_s^2 + a^2 - 2ap_{sx} \cos \varphi'}$$

es la distancia del manantial al punto de integración  $Q$ .

Cuando la dirección de campo lejano está fuera de las cáusticas, la función de fase (5.29) tiene dos o cuatro puntos estacionarios de primer orden, soluciones de la ecuación:

$$g'(\varphi'_0) = \frac{ap_{sx}}{r(\varphi'_0)} \sin \varphi'_0 - a \sin \theta \sin(\varphi - \varphi'_0) = 0 \quad (5.30)$$

y cada uno de ellos da lugar a una contribución asintótica del campo difractado que, según (A4.6), es de la forma:

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{2\pi}{k|g''(\varphi'_0)|}} \bar{G}(\varphi'_0) e^{jk g(\varphi'_0) \pm j\pi/4} \frac{e^{-jks}}{s} \quad (5.31)$$

Dichas contribuciones son las correspondientes a los rayos difractados ordinarios de la GTD.

La ecuación (5.31) no es válida cuando

$$g''(\varphi'_0) = - \frac{(ap_{sx} \sin \varphi'_0)^2}{r^3(\varphi'_0)} + \frac{ap_{sx} \cos \varphi'_0}{r(\varphi'_0)} + a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi'_0) = 0 \quad (5.32)$$

ecuación que, junto con (5.30), nos da las direcciones cáusticas.

La cáustica axial aparece cuando el manantial y el punto de campo se sitúan en el eje de un borde circular. En las proximidades de dicha cáustica hay que resolver numéricamente la integral de (5.28), que utiliza las corrientes equivalentes de (5.16), válidas para cualquier dirección de observación, no siendo necesario utilizar aproximación alguna en el integrando [44]. A veces, puede existir una solución analítica para dicha integral [1].

### V.3.1.- FACTORES DE CORRECCION DE CAUSTICA

Cuando el manantial no se sitúa en el eje de un borde circular, el campo difractado en borde tiene cáusticas que forman superficies con contorno de diamante [44] sobre la esfera de campo lejano. En una representación bidimensional se obtienen curvas cáusticas como las de la figura V.4.

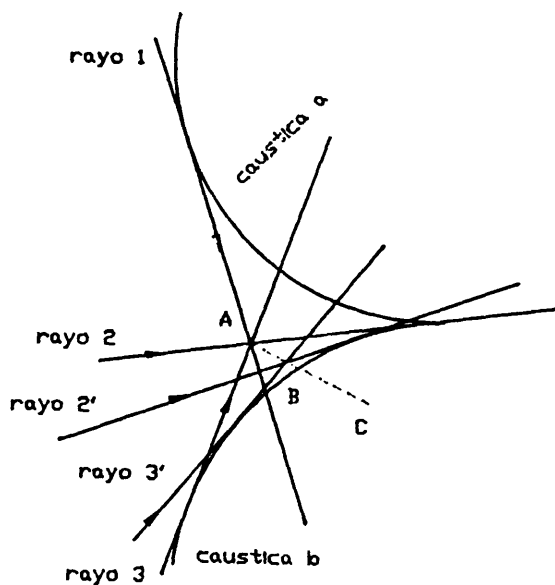


Fig. V.4.- Curvas cáusticas.

Consideremos el punto A de la figura anterior, situado entre las cáusticas a y b, y que los rayos 2 y 3 contribuyen al campo difractado. En el movimiento de A hacia C se cruza la cáustica en B. Cerca de B (rayos 2' y 3') y lejos de una cúspide de cáusticas, dichos rayos tienden a confundirse y la función de fase puede ponerse en la forma:

$$g(\varphi') = g(\varphi'_2) + \frac{1}{2} g''(\varphi'_2)(\varphi - \varphi'_2)^2 + \frac{1}{6} g'''(\varphi'_2)(\varphi - \varphi'_2)^3 \quad (5.33)$$

que al sustituir en la representación integral del campo difractado, según el apéndice AIV, se obtiene una expresión asintótica de la forma de (A4.9), que es:

$$\bar{E} = 2\pi \left( \frac{2}{kg''(\varphi'_2)} \right) \bar{G}(\varphi'_2) A_i(-\sigma) e^{j\frac{2}{3}\sigma^{3/2}} e^{jkg(\varphi'_2)} \frac{e^{-jks}}{s} \quad (5.34)$$

siendo  $\varphi'_2$  un punto de fase estacionaria

$$-\sigma = -\left(\frac{k}{2}\right)^{2/3} \frac{g''(\varphi'_2)^2}{g'''(\varphi'_2)^{4/3}}$$

correspondiendo  $\sigma \rightarrow 0$  al caso de un punto estacionario de 2º orden, con dos rayos en la cáustica.  $\sigma$  es la distancia a la cáustica.

Por otro lado, la función de Airy [11] tiene la siguiente expresión asintótica cuando su argumento es negativo y tiende a  $-\infty$ :

$$A_i(-\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma^{1/4}} \operatorname{sen} \left( \frac{2}{3} \sigma^{3/2} + \pi/4 \right)$$

la cual sugiere que si al campo de la forma de (5.31) de cada rayo difractado de la GTD se le multiplica por el factor de corrección:

$$C = \frac{A_i(-\sigma) \sqrt{\pi} \sigma^{1/4}}{\operatorname{sen} \left( \frac{2}{3} \sigma^{3/2} + \pi/4 \right)}$$

se obtiene el valor límite adecuado en la cáustica.

Pasada la cáustica (punto C) desaparecen los rayos 2 y 3, lo que en un borde circular supone pasar de cuatro a dos rayos difractados. La función de fase se puede poner:

$$g(\varphi') = g(\varphi'_0) + g'(\varphi'_0)(\varphi' - \varphi'_0) + \frac{1}{6} g'''(\varphi'_0)(\varphi' - \varphi'_0)^3$$

donde  $\varphi'_0$  es un cero de  $g''(\varphi')$ . Sustituyendo el desarrollo anterior en la representación integral del campo difractado, se obtiene [44]:

$$\bar{E} = 2\pi \left( \frac{2}{k g''(\varphi'_0)} \right) \bar{G}(\varphi'_0) A_i(\sigma) \quad (5.35)$$

que es un término de sombra de cáustica, a añadir a los dos rayos difractados restantes, más allá de la cáustica.

En (5.35)

$$\sigma = k g'(\varphi'_0) \left( \frac{2}{k g''(\varphi'_0)} \right)^{1/3} \cdot e^{j k g(\varphi'_0)} \cdot e^{j k r/r}$$

que debe ser siempre positiva.

#### V.3.1.1.- Factores de corrección cerca de una cúspide de cáusticas

Si  $g'''(\varphi) = 0$ , se está situado en la cúspide de cáusticas y las correcciones anteriores no son válidas. En este caso, al desarrollar la función de fase de (5.28), hay que añadir un término de cuarto orden,

$$g(\varphi') = g(\varphi'_2) + \frac{1}{2} g''(\varphi'_2)(\varphi' - \varphi'_2)^2 + \frac{1}{24} g''''(\varphi'_2)(\varphi' - \varphi'_2)^4$$

Sustituyendo la expresión anterior en la integral de fase de (5.28), se obtiene la siguiente expresión asintótica de dicha integral [44]:

$$I = \left( \frac{12}{hg'''} \right)^{1/4} \sqrt{\pi} e^{-j \frac{3}{4} kg^2/g'' + j\pi/8} D_{-\frac{1}{2}} \left( g'' \sqrt{\frac{3k}{g''}} e^{-j\pi/4} \right) \quad (5.36)$$

donde  $g''$  y  $g'''$  son la segunda y cuarta derivada de la función de fase para el rayo central (rayo 2).

Teniendo en cuenta las expresiones asintóticas de la función de cilindro parabólico  $D_{-\frac{1}{2}}$  [26]:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{kg''}} e^{j\pi/4} \quad (5.37)$$

para  $g''(\phi_2')$  con el mismo signo que  $g'''(\phi_2')$ , y:

$$I = \sqrt{\frac{-2\pi}{kg''}} \left( e^{-j\pi/4} + \sqrt{2} e^{-j \frac{3}{2} kg^2/g'' + j\pi/4} \right) \quad (5.38)$$

para  $g''(\phi_2')$  con distinto signo que  $g'''(\phi_2')$ , se obtienen los siguientes factores de corrección cerca de cúspide de cáusticas

$$C = \left( \frac{3k}{g'''} \right)^{1/4} \sqrt{g''} \frac{D_{-\frac{1}{2}} \left( g'' \sqrt{\frac{3k}{g''}} e^{j3\pi/4} \right)}{e^{j \frac{3}{4} kg^2/g'' - j\pi \frac{3}{8}} + \sqrt{2} e^{-j \frac{3}{4} kg^2/g'' + j\pi/8}} \quad (5.39)$$

$$C = \left( \frac{3k}{g'''} \right)^{1/4} \sqrt{g''} \frac{D_{-\frac{1}{2}} \left( g'' \sqrt{\frac{3k}{g''}} e^{-j\pi/4} \right)}{e^{-j \frac{3}{4} kg^2/g'' + j\pi/8}} \quad (5.40)$$

que se deben aplicar en las regiones con cuatro y dos rayos difractados en borde, respectivamente, es decir: dentro y fuera de la cáustica.

En (5.39) y (5.40) se emplean los valores absolutos de

la segunda y cuarta derivada de la función de fase para el rayo central y se supone que  $g'''(\varphi_2') > 0$ .

Si  $g'''(\varphi_2') < 0$  hay que emplear las expresiones complejas conjugadas de (5.39) y (5.40).

#### V.4.- MODIFICACION DE LA UTD. DIFRACCION CON PENDIENTE DEL CAMPO INCIDENTE

En el planteamiento del campo difractado de la UTD, se hace la hipótesis de que el campo incidente en el borde tiene una lenta variación espacial en las proximidades del punto de difracción (exceptuando la variación de fase a lo largo del rayo). Pero puede ocurrir que el campo incidente en el punto de difracción tenga una rápida variación en dirección normal al rayo, en cuyo caso falla la solución de la UTD, ya que no se cumple una de sus hipótesis. Para salvar esta dificultad, Kouyoumjian y Hwang [18], [37], han introducido un término adicional al campo difractado de la UTD, de manera que el campo difractado, en componentes  $E_{\beta_0}^d$  y  $E_{\phi_0}^d$  (paralela y perpendicular respectivamente al plano de difracción ligado al borde), se puede poner en la forma:

$$\begin{pmatrix} E_{\beta_0}^d \\ E_{\phi_0}^d \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} -D_s & 0 \\ 0 & -D_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\beta_0}^i \\ E_{\phi_0}^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_s & 0 \\ 0 & -d_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial n'} E_{\beta_0}^i \\ \frac{\partial}{\partial n'} E_{\phi_0}^i \end{pmatrix} \right] \sqrt{\frac{\rho}{s(\rho+s)}} e^{-jks} \quad (5.41)$$

$$d_{s,h} = \frac{1}{jks \sin \beta_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} D_{s,h} \quad (5.42)$$

siendo  $D_{s,h}$  los coeficientes de difracción de la UTD ordinaria,  $E_{\beta_0}^i$  y  $E_{\phi_0}^i$  las componentes del campo incidente paralela y perpendicular al plano de incidencia ligado al borde y  $n'$  la normal a dicho plano. El primer término (5.41) corresponde al campo del rayo difractado ordinario y, el segundo, al de la difracción con pendiente. A la UTD que considera dicha modificación en el campo difractado se la conoce con el nombre de MUTD ("Modified UTD"), o MSD ("Modified Slope Diffraction"). Dicha modificación hace que el campo total y su primera derivada sean continuos en los límites de sombra y re-



flexión, lo que se justifica en [24] por Boersma y Rahmat Samie mediante un desarrollo asintótico de segundo orden, del tipo Pauli-Clemmow [16], de la representación integral del campo difractado por una onda arbitraria incidente en un semiplano.

#### V.4.1.- DERIVADAS DE LOS COEFICIENTES DE DIFRACCION

Para el cálculo del campo difractado en borde, con la modificación de (5.41), es necesario calcular las derivadas de los coeficientes de difracción  $D_s$  y  $D_h$  que aparecen en (5.42), que, considerando por ejemplo el segundo término de (4.39), supone derivar la función:

$$t = \cot \left[ \frac{\pi - (\Phi_0 - \Phi'_0)}{2n} \right] F[kL \alpha^-(\psi_-)] \quad (5.43)$$

con:

$$\alpha^-(\psi_-) = 1 + \cos(\Phi_0 - \Phi'_0)$$

que es especialmente importante en el límite de sombra,  $\Phi_0 = \Phi + \Phi'_0$ . En dicho caso, según (4.36),  $N^- = 0$ , y la función  $t$  y su derivada se hacen singulares.

Si llamamos  $\epsilon$  a la distancia a dicho límite de sombra,  $\Phi_0 = \pi + \Phi'_0 - \epsilon$  y la derivada de (5.43) es:

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi'_0} = \frac{F[kL(1 - \cos \epsilon)]}{2n \sin^2(\epsilon/2n)} + \cot(\epsilon/2n) F'[kL(1 - \cos \epsilon)] kL \sin \epsilon \quad (5.44)$$

Ahora bien, derivando (4.30), se obtiene fácilmente:

$$F'(x) = F(x) \left( \frac{1}{2x} + j \right) - j \quad (5.45)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que para  $x$  pequeña:

$$e^{jx} = 1 + jx$$

la primera igualdad de (4.37) se escribe:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+j)\sqrt{\pi x} - 2jx + \frac{1}{\sqrt{2}} (1+j)jx\sqrt{\pi x} \quad (5.46)$$

Así pues, para  $\epsilon$  pequeño, y mediante desarrollos en serie de las funciones trigonométricas, el argumento de las funciones de transición de (5.44) es:

$$x = kL \frac{\epsilon^2}{2}$$

Además:

$$\cot \frac{\epsilon}{2n} = \frac{2n}{\epsilon}$$

con lo que sustituyendo (5.45) y (5.46) en (5.44) se obtiene, en el límite:

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi_0} = -2njkl$$

que multiplicada por el factor  $k^{-\frac{1}{2}}$  de (4.39), hace el término del campo difractado con pendiente de (5.44), del orden de  $k^{-\frac{1}{2}}$  con relación al campo incidente.

## CAPITULO VI

### APLICACION DE LA TEORIA GEOMETRICA DE LA DIFRACCION A LA RADIACION DE ANTENAS EMBARCADAS

En este capítulo se expone la metodología de aplicación de la teoría geométrica de la difracción a antenas embarcadas en vehículos espaciales.

Para ello se describen las técnicas de modelización de la estructura, trazado de rayos y organización de los distintos módulos del programa de cálculo, considerando el caso particular del estudio de la degradación del diagrama de radiación de las antenas de telemedida y telemando del satélite HIPPARCOS, debido a la influencia de la propia estructura, supuestamente conductora.

Con objeto de verificar la teoría expuesta, se comparan los resultados del cálculo numérico del modelo teórico, con los medidos en un modelo experimental similar.

#### VI.1.- TECNICAS DE MODELIZACION DE ANTENAS SOBRE ESTRUCTURAS

En el estudio de sistemas radiantes, formados por antenas en presencia de estructuras grandes en términos de longitudes de onda (satélites, barcos, etc.), surge la necesidad de predecir la deformación de los diagramas de radiación producida por la presencia de los dispersores, con objeto de minimizar dichos efectos por modificación de la posición de las antenas, o por elección entre varias opciones. Dicha tarea puede realizarse mediante medidas sobre un modelo experimental o mediante tratamiento por computador de un modelo teórico. La primera solución puede resultar costosa y emplear demasiado tiempo. En cuanto a la segunda solución la teoría geométrica de la difracción puede ser de gran utilidad, complementándose ambas soluciones en cualquier caso.

Debido al carácter "local" de los campos electromagnéticos en alta frecuencia, es posible descomponer una estructura compleja en otras más sencillas, del tipo cuña y superficies genéricas con bordes, cuyos coeficientes de difracción son conocidos. La GTD supone que los mecanismos de difracción y reflexión se localizan en los correspondientes puntos de difracción y reflexión de la radiación incidente y los campos electromagnéticos sobre los correspondientes rayos pueden determinarse una vez conocidos los coeficientes de difracción y reflexión de la UTD, expuestos en el capítulo IV, y con las correcciones a dicha teoría, dadas en el capítulo V, donde se considere necesario.

#### VI.2.- ORGANIZACION GENERAL DEL PROGRAMA DE CALCULO

En la figura VII se muestra el organigrama del programa principal que controla las entradas y salidas del cálculo del diagrama de radiación de una antena embarcada, mediante la aplicación de la teoría geométrica de la difracción. Dicho organigrama es válido para cualquier sistema radiante, teniendo en cuenta los datos propios del sistema concreto.

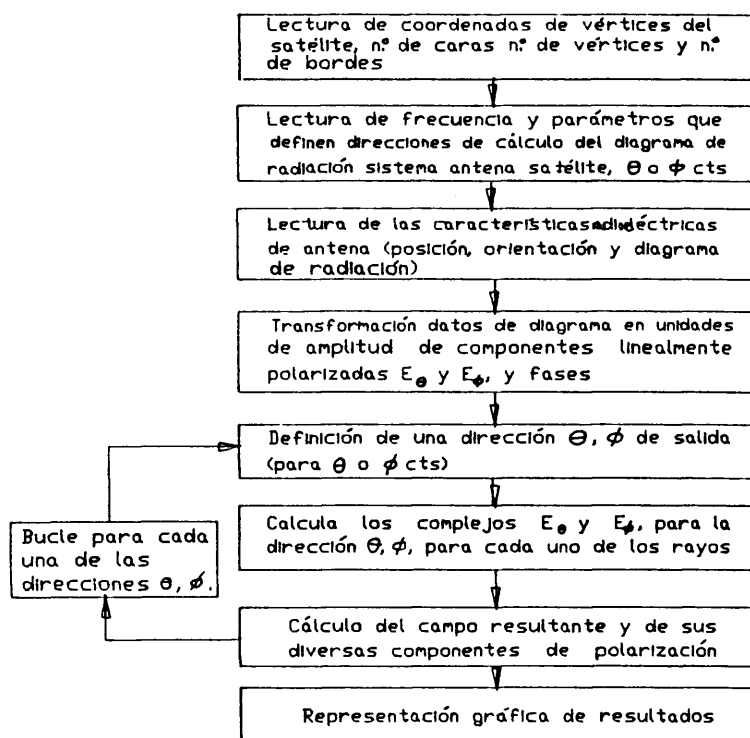


Fig. VI.1.- Organigrama del programa principal.

Hay que hacer notar que para acceder al programa es preciso definir dos sistemas de coordenadas:

-Un sistema global  $x, y, z$ , al que se refieren los resultados, y en el que se definen las coordenadas de la estructura y la posición del centro de fase de la antena.

-Un sistema particular  $x', y', z'$ , al que se refieren los datos del diagrama de radiación de la antena aislada.

Otra de las tareas que se debe realizar es la de simular el "trazado de rayos", la cual es previa al cálculo de los campos.

#### VI.2.1.- MODELO RADIOELECTRICO DE LA ANTENA EN EL ESPACIO LIBRE

Si los puntos de difracción y reflexión están en zona lejana de la antena, el campo emitido por ésta en la dirección  $\theta, \phi$  es, en general, el vector complejo que corresponde a una onda localmente plana, elípticamente polarizada, que puede ser representada por dos componentes de polarización ortogonales, lineales o circulares [45],  $\vec{E}(\theta, \phi) = E_u \vec{u} + E_v \vec{v}$ , siendo  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores unitarios ortogonales.

El diagrama de radiación de la antena puede tener una expresión analítica (dipolo, monopolo, etc.), en cuyo caso no hay que introducir ningún dato, sino calcular los campos en el módulo de programa correspondiente. Por el contrario, dicho diagrama de radiación puede ser el resultado de la medida, en cuyo caso los datos de diagrama se leen en el programa principal en conjuntos tridimensionales  $(I, J, K)$ , siendo  $I$  el número de ángulos  $\theta$  en los que se realizan las medidas,  $J$  el número de ángulos  $\phi$  y  $K$  el número de parámetros que se leen (módulos de componentes lineales  $E_\theta$  y  $E_\phi$  y fases, o módulos de componentes circulares y "tilt" de polarización).

Los datos de amplitudes de las componentes del campo

suelen darse en decibelios, por lo que es necesario que el programa realice la transformación de los datos a los valores correspondientes en voltios/metro. Además, como el programa utiliza componentes de polarización lineales, si los datos de diagrama se diesen en componentes circulares, estas últimas se transforman en las anteriores dentro del programa principal, el cual también puede operar en el sentido inverso, con lo que se pueden obtener las componentes circulares de los resultados de polarizaciones lineales.

Si se desea determinar la directividad de la antena, o intensidad de radiación emitida con relación al nivel isotrópico, para una dirección prefijada de campo lejano  $\theta, \phi$

$$G(\theta, \phi) = 4\pi P(\theta, \phi) / P_t$$

$$P(\theta, \phi) = |\vec{E}|^2$$

hay que calcular el nivel isotrópico  $P_t/4\pi$ , siendo  $P_t$  la potencia total radiada por la antena, cuya expresión es:

$$P_t = \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\pi} P(\theta, \phi) d\phi \right] \sin\theta d\theta$$

y que se evalúa en el programa principal.

#### VI.2.2.- MODELIZACION RADIOELECTRICA DEL SISTEMA ANTENA-ESTRUCTURA: TRAZADO DE RAYOS

La aplicación de la aproximación GTD al cálculo de los campos electromagnéticos de un sistema antena-estructura se puede dividir en dos partes: un proceso geométrico de determinación de la trayectoria de los rayos y un proceso matemático de evaluación del correspondiente campo (en amplitud y fase), en una determinada dirección de salida o localización del receptor, y para cada uno de los rayos, siempre que no sean sombreados por los obstáculos.

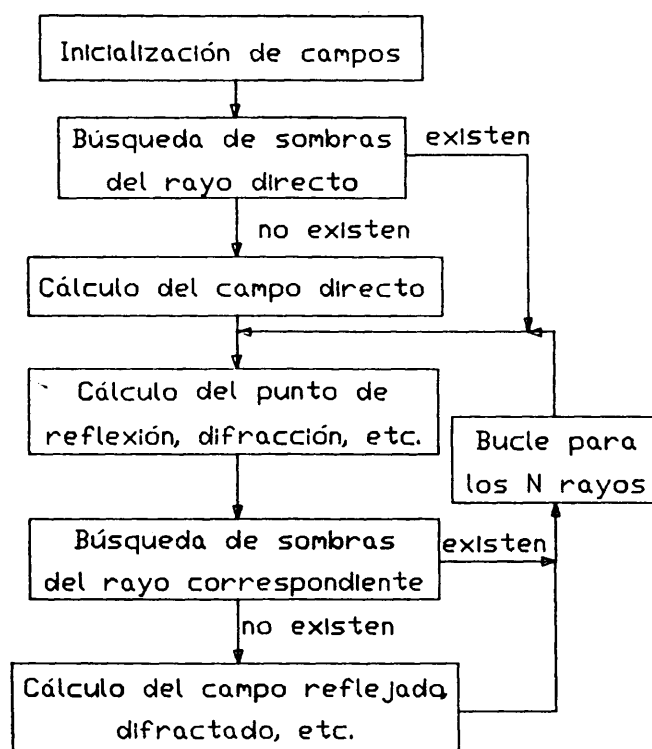


Fig. VI.2.- Organigrama del trazado de rayos y cálculo de campos electromagnéticos, en una dirección  $\theta$ ,  $\phi$ .



Ambos procesos conducen a la determinación del campo resultante que, según la aproximación utilizada, es la suma de las contribuciones de campo sobre cada uno de los rayos.

Así pues, el problema de modelización GTD de un sistema radiante se reduce a seleccionar los rayos cuya contribución al cálculo del campo es más significativa y a construir las siguientes subrutinas o "módulos" de programa:

- Módulos de cálculo de punto de interacción (reflexión, difracción, etc.).
- Módulos de búsqueda de sombras.
- Módulos electromagnéticos para calcular los campos incidentes, reflejados, etc., sobre cada uno de los correspondientes rayos.

La organización de dichos módulos en la programación se esquematiza en el organigrama de la figura VI.2.

Como regla general para seleccionar los rayos diremos que, un modelo de primer orden (que es en general suficiente para aplicar la GTD) debe incluir el rayo directo, los rayos reflejados, los rayos simplemente difractados en borde y los rayos doblemente reflejados.

Ahora bien, si cerca de un límite óptico, donde los rayos difractados son más intensos, existen bordes de obstáculos, deben incluirse rayos doblemente difractados y, por supuesto, reflejados-difractados y viceversa.

El trazado de rayos no es único para una estructura, sino que depende de la situación relativa de la antena respecto de la estructura y, a veces, del plano de diagrama que se desee calcular.

La construcción de un modelo en cartón o en madera del sistema antena estructura, ayuda a la concepción del trazado de rayos, los cuales se simulan mediante hilos.

#### VI.2.2.1.- Módulos geométricos para el trazado de rayos

Dichos módulos se refieren, por un lado, al cálculo de puntos de reflexión, difracción, doble reflexión, etc., y, por otro lado, a la comprobación de si los correspondientes rayos están sombreados o no por alguna parte de la estructura.

##### VI.2.2.1.1.- Módulos del punto de reflexión

El cálculo del punto de reflexión depende de que la superficie reflectora sea plana o curva. En el caso de superficie plana es posible determinar analíticamente las coordenadas del punto especular QR, mediante la relación:

$$\overline{QR} = \overline{PS} - 2\overline{RR} \cdot \overline{UN} + (\overline{RR}/R) \cdot \overline{UF} \quad (6.1)$$

siendo:

$$R = \overline{UF} \cdot \overline{UN}$$

y

$$\overline{RR} = \overline{UN} (\overline{PS} - \overline{PA})$$

que deben ser ambos positivos para que exista punto de reflexión.  $\overline{PA}$  y  $\overline{PS}$  son el vector de posición de un punto cualquiera del plano y el del centro de fase del manantial, respectivamente (fig. VI.3), en el sistema de coordenadas global x, y, z.

$\overline{UF}$  y  $\overline{UN}$  son vectores unitarios en la dirección de cálculo del campo y de la normal al plano, respectivamente. Con el procedimiento anterior se determina el punto de reflexión sobre plano infinito, por lo que, si la placa es limitada (por ejemplo poligonal, como en la figura VI.3), hay que comprobar si el punto

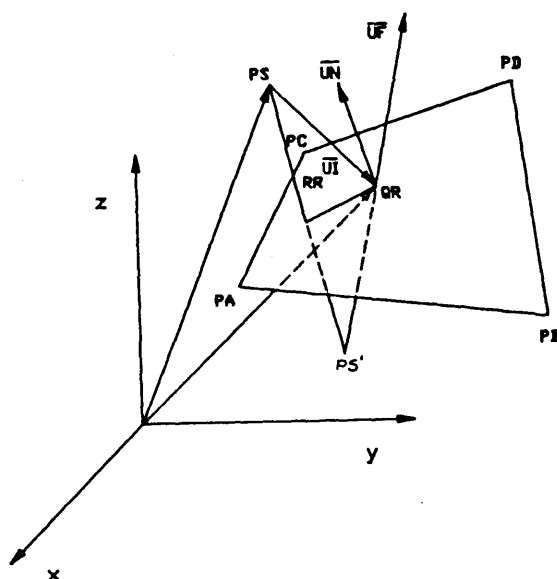


Fig. VI.3.- Rayo reflejado en plano.

de reflexión está contenido dentro de los límites establecidos, lo que, en este caso, se reduce a comprobar si la suma de los ángulos que forman cada pareja de rectas que van desde el punto QR a dos vértices consecutivos, es igual a  $360^\circ$ , siendo cada ángulo menor que  $180^\circ$ . La expresión matemática correspondiente para que se cumpla lo anterior es que se debe verificar, para todos los triples productos posibles:  $(\overline{PA-QR})(\overline{PB-QR})\overline{UN} > 0$ .

Si la superficie es simplemente curvada o tiene simetría rotacional, es posible utilizar métodos de búsqueda unidimensional del punto de reflexión, pero, si es doblemente curvada, hay que efectuar dicha búsqueda en dos dimensiones, por lo que, en general, se utiliza el procedimiento expuesto en el apéndice AIII.

#### VI.2.2.1.2.- Cálculo del punto de difracción en borde

siendo  $\overline{UW}$  el vector unitario en dirección del borde y los demás vectores que aparecen en la expresión anterior son los vectores de posición en el sistema de coordenadas global, con:

**y**

Fig. VI.4.- Rayo difractado en borde.

Para que dicho punto de difracción exista tiene que estar contenido dentro del límite finito del borde, para lo cual debe verificarse:

$$(\overline{QD} - \overline{PA}) \cdot \overline{UW} > 0$$

$$|\overline{QD} - \overline{PA}| < |\overline{PB} - \overline{PA}|$$

Si el borde es curvo y forma parte de una superficie curva de tipo cilíndrico, parabólico, etc., es conveniente definir dicho borde  $\Gamma$  como la intersección de un cilindro con dicha superficie, en un sistema particular  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ , con origen en el eje de dicho cilindro (figura VI.5), con los ejes  $z$  coincidentes, de manera que la proyección sobre el plano  $xy$  es, en general, una elipse.

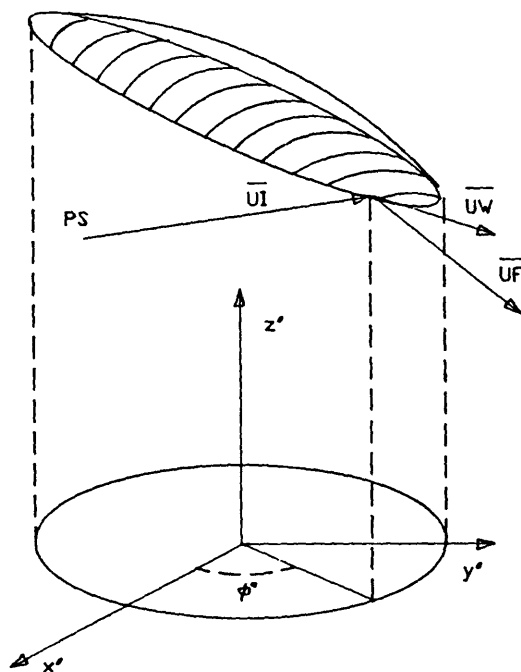


Fig. VI.5.- Sistemas de coordenadas para definir borde curvo  $\Gamma$ .

Así pues, la ecuación del borde es:

$$\begin{aligned} x'' &= g_1(\Phi'') \\ y'' &= g_2(\Phi'') \\ z'' &= f(x'', y'') = g_3(\Phi'') \end{aligned} \quad (6.2)$$

siendo  $\Phi''$  el ángulo que forma la proyección de un punto del borde sobre el plano  $x''y''$ , de manera que el principio de Fermat para un punto sobre el borde, donde el vector unitario tangente es  $\overline{UW}$  y los de incidencia y reflexión  $\overline{UI}$  y  $\overline{UF}$ , respectivamente, se escribe:

$$\overline{UW} \cdot (\overline{UI} - \overline{UF}) = 0 \quad (6.3)$$

siendo

$$\overline{UW} = \left( \frac{dg_1}{d\Phi''}, \frac{dg_2}{d\Phi''}, \frac{dg_3}{d\Phi''} \right) \quad (6.4)$$

con lo que el primer miembro de (6.3) es una función de  $\Phi''$ , y las soluciones a dicha ecuación, para encontrar el punto de difracción, se hallan por procedimientos standard unidimensionales de búsqueda de raíces

#### VI.2.2.1.3.- Cálculo de puntos de doble interacción

El cálculo de puntos de doble difracción está ampliamente descrito en el apéndice AIII.

En el cálculo de dobles reflexiones, difracción-reflexión o viceversa, es frecuente que, al menos, una de las superficies implicadas en la reflexión sea plana, en cuyo caso el proceso equivale al cálculo de un punto de difracción o reflexión en el que se considera como manantial la fuente imagen (PS' en figura VI.3)

$$\overline{PS'} = \overline{PS} - 2RR.\overline{UN} \quad (6.5)$$

o la dirección de salida imagen de  $\overline{UF}$  respecto del plano en cuestión. Cualquier otro caso debe ser estudiado cuidadosamente para encontrar un procedimiento que, fundamentado en dos aplicaciones consecutivas de las leyes de la difracción o (y) reflexión sea numéricamente efectivo para que no se pierda una de las ventajas principales de la GTD, que es su reducido tiempo de cálculo.

#### VI.2.2.1.4.- Búsqueda de sombras

Todo procedimiento de búsqueda de sombras para un determinado rayo consta de las siguientes partes:

- Búsqueda del punto de intersección del rayo con la estructura considerada, supuesta de extensión infinita.
- En caso de que dicho punto exista, comprobar si está contenido dentro de los límites finitos de la estructura.

Cuando se trata de una placa plana, la intersección de un rayo, que parte de un punto PS en la dirección  $\overline{UF}$ , con un plano (véase figura VI.3), es posible si se verifica que  $\overline{UF}.\overline{UN} < 0$ , en cuyo caso el punto de intersección Q viene dado por la ecuación:  
 $Q = \overline{PS} + (RR/R).\overline{UF}$ .

La comprobación de si está o no contenido dentro de los límites finitos de la placa se explicó en el apartado VI.2.2.1.1, para placas poligonales. Si el borde está definido como en (6.2), la x" e y" del punto de intersección del rayo con el plano de la placa tiene que estar dentro de los límites de definición del borde.

En general, en el caso de superficies curvas, para calcular el punto de intersección Q (figura VI.6), puede usarse la

misma rutina que se utiliza en el cálculo del punto de reflexión. En dicho punto Q se verifica que:  $\overline{UI} \cdot \overline{UN} - \overline{UF} \cdot \overline{UN} = 0$ , y será un punto de intersección (rayo sombreado), cuando se verifique:  $\overline{UF} \cdot \overline{UN} < 0$ , y de reflexión, cuando el producto escalar anterior sea positivo.

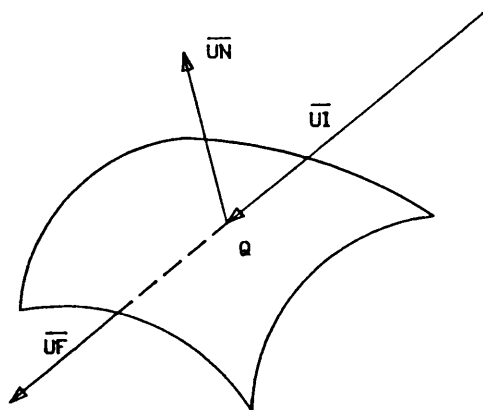


Fig. VI.6.- Rayo sombreado por superficie curva.

#### VI.2.2.2.- Módulos electromagnéticos

En este apartado nos referimos a un conjunto de rutinas que calculan los campos electromagnéticos sobre los diferentes rayos: directo, reflejado, difractado, etc., cuando no son sombreados por los obstáculos. Estos módulos pueden ser de dos tipos:

- Particularizados para una determinada estructura (cuña recta, cilíndrica, etc.) y frente de onda incidente (habitualmente esférico).
- Locales, de carácter general, válidos para cualquier estructura y frente de onda incidente, siempre que se especifiquen como datos de entrada las propiedades "locales" de dicho frente de onda y de la estructura en el punto de



reflexión, difracción, etc.

Los módulos del primer tipo [46] tienen la ventaja de su simplicidad, ya que pueden llevar incorporados el trazado de rayos y el cálculo del campo lejano, pero tienen el inconveniente de particularizar la estructura y el frente de onda incidente, y el de necesitar un programa posterior de sombreado del rayo correspondiente que, en caso de existir sombra, puede hacer inútil el cálculo, previamente realizado, del correspondiente rayo reflejado o difractado.

Así pues, en general, hay que construir programas del 2º tipo que puedan ser aplicados al cálculo de los campos reflejados y difractados en cualquier superficie y a cualquier distancia de la misma, una vez conocidas las características locales de la estructura y del frente de onda incidente en el punto de interacción del rayo con dicha estructura. Además, los resultados obtenidos con este tipo de programa pueden servir de datos de entrada para una segunda interacción.

#### V1.2.2.2.1.- Cálculo del campo directo

Entendiendo por rayo directo el que sale directamente del manantial y llega a un punto (o dirección de campo lejano), sin tener en cuenta la presencia de ninguna estructura, el cálculo del campo directo en una dirección  $\overline{UF}$  se reduce a:

- Definir el punto P de cálculo en el sistema de coordenadas del manantial ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ).
- Calcular el campo correspondiente en la subrutina de la "fuente". En el caso de varias opciones de fuente, se selecciona ésta mediante un índice.
- Obtener las componentes  $E_\theta$ ,  $E_\phi$  de campo lejano en el sistema de coordenadas global ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), y referir la base al origen de dicho sistema.

#### VI.2.2.2.2.- Cálculo del campo reflejado

Se utiliza, en general, una rutina "local" fundamentada en la formulación del capítulo III y apéndice AII.

Una vez calculado el punto de reflexión, para acceder al cálculo del campo reflejado hay que efectuar los siguientes pasos previos:

- Calcular el campo incidente en el punto de reflexión (el campo incidente puede ser, a su vez, otro campo reflejado o difractado previamente calculado).
- Definir direcciones principales y curvaturas principales del frente de onda incidente y de la superficie reflectora en el punto de reflexión (apéndice AIII).

En cálculos de diagramas de radiación el programa permite obtener los campos  $E_\theta$ ,  $E_\phi$  de campo lejano en el sistema de coordenadas global. En cálculos de campo cercano se obtienen las componentes rectangulares del campo reflejado así como los radios de curvatura y direcciones principales del frente de ondas reflejado (capítulo II y apéndice AII), en el punto de cálculo del campo.

En el caso de cálculo de campo reflejado lejano en placa plana, el problema se reduce a calcular el campo radiado por la fuente imagen PS' dada por la ecuación (6.5).

Dicho campo es:

$$\overline{E_R} = -\overline{E_I} + 2(\overline{E_I} \cdot \overline{UN}) \cdot \overline{UN}$$

siendo  $\overline{E_I}$  el campo incidente en el punto de reflexión. Finalmente el campo debe expresarse en componentes  $E_\theta$  y  $E_\phi$  de campo lejano:

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= E_x \cos \theta \cos \Phi + E_y \cos \theta \sin \Phi - E_z \sin \theta \\ E_{\Phi} &= -E_x \sin \Phi + E_y \cos \Phi \end{aligned}$$

Es obvio que, este caso puede ser también tratado con la subrutina "local", anteriormente mencionada, haciendo nulas las curvaturas de la superficie y definiendo las direcciones principales  $\bar{\alpha}_1$  y  $\bar{\alpha}_2$  según la figura VI.3:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \frac{\overline{PB} - \overline{PA}}{|\overline{PB} - \overline{PA}|} \\ \bar{\alpha}_2 &= \frac{\overline{PC} - \overline{PA}}{|\overline{PC} - \overline{PA}|} \end{aligned} \quad (6.6)$$

de manera que:

$$\bar{\alpha}_1 \times \bar{\alpha}_2 = \overline{UN}$$

#### VI.2.2.2.3.- Cálculo del campo difractado en borde

Una subrutina de carácter local permite calcular el campo difractado en cuña (recta o curvada), según la UTD (capítulo IV), con la inclusión, si se desea, del cálculo del campo difractado con pendiente de la MUTD (capítulo V, apartado V.4).

Una vez conocidos los puntos de difracción, hay que efectuar los siguientes pasos previos al cálculo del campo difractado correspondiente a un determinado punto de difracción:

- Calcular el campo incidente en el punto de difracción (que puede ser otro campo reflejado o difractado previamente).

- Definir direcciones y curvaturas principales del frente de onda incidente y de cada una de las superficies que forman la cuña en el punto de difracción.
- Definir los vectores unitarios tangente y normal al borde, así como la curvatura del mismo en el punto de difracción.

En el caso en que se desee incluir la difracción con pendiente, y con el objetivo de determinar numéricamente la pendiente del campo incidente, hay que calcular además el campo incidente en otro punto  $P'$  próximo al punto de difracción  $P$ , situado a lo largo de la normal al plano de incidencia ligado al borde

$$\vec{P}' = \vec{P} + \delta \vec{n}$$

siendo  $\delta$  un pequeño incremento ( $\approx 0.01\lambda$ ) y  $\vec{n}$  el vector unitario normal al plano de incidencia ligado al borde, de manera que la pendiente del campo incidente se pueda aproximar por:

$$\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial n} = \frac{\vec{E}_i(P') - \vec{E}_i(P)}{\delta}$$

Como en el caso de la reflexión, en la subrutina de difracción se pueden obtener resultados de campo lejano, o de campo a distancia finita, obteniéndose en este último caso, además de las componentes rectangulares del campo, las direcciones principales y radios de curvatura principales del frente de onda difractado.

Para que la rutina anterior sea válida, debe verificarse la condición dada en [38] de que la distancia de los rayos difractados a las superficies que forman las cuñas, exceda la cantidad  $(ka_i)^{-1/3}$ , siendo  $a_i$  el radio de cada superficie. Tampoco es válida en las cáusticas de rayos difractados. En dicho caso se utilizan módulos de cálculo fundamentados en la teoría expuesta en el apartado V.3.

El caso de cuña recta es un caso en el que las entradas a la programación se simplifica:

- Las curvaturas principales de las superficies que forman la cuña son nulas, y las direcciones principales  $\bar{a}_1$  y  $\bar{a}_2$  para cada cara de la cuña, son como las definidas en (6.6), caracterizando la cuña con dos puntos (PA, PC) del borde y un punto (PB, PB') en cada cara de dicha cuña.
- La curvatura del borde es, evidentemente, nula y el vector unitario tangente,  $\bar{UW}$ , está definido por

$$\bar{UW} = \frac{\overline{PC - PA}}{|\overline{PC - PA}|}$$

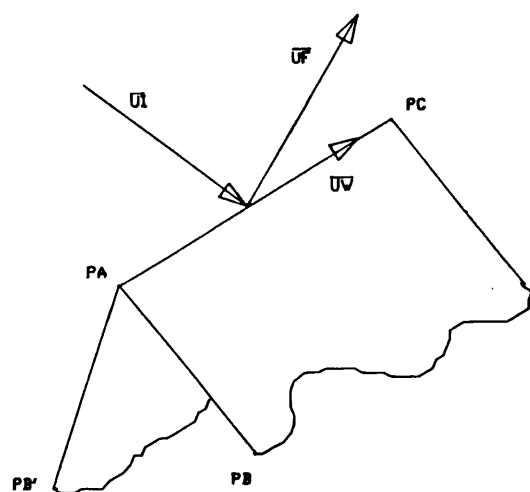


Fig. VI.7.- Geometría de cuña recta.

La corrección de vértices, si se desea, se hace en otra rutina, fundamentada en la teoría desarrollada en el apartado V.2.1.

### VI.3.- APLICACION A UN CASO PARTICULAR SENCILLO

Para la realización práctica de los casos reales se ha desarrollado un programa de cálculo en lenguaje Fortran que incluye los subprogramas descritos anteriormente y que se procesa en el ordenador del Centro de Cálculo del CSIC (Cyber 180/855).

Como se ha explicado en el apartado anterior, la organización y selección de rutinas para calcular el campo electromagnético total radiado por una antena en presencia de una determinada estructura depende del trazado de rayos seleccionado en el sistema radiante.

Como ejemplo de aplicación de la programación expuesta a un caso sencillo, ilustrativo de la influencia de los diferentes rayos, incluido el rayo difractado con pendiente, se presenta el dipolo de media onda de la figura VI.8, que está orientado paralelamente a una de las caras de la cuña recta sobre la que el dipolo va montado, y perpendicular al borde de dicha cuña. En este ejemplo el sistema de referencia de la antena coincide con el sistema de coordenadas global ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

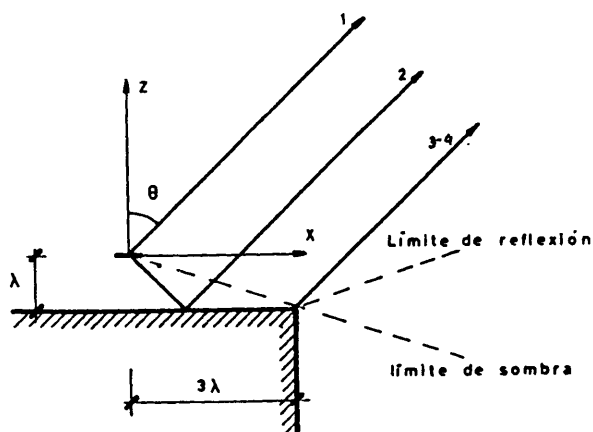


Fig. VI.8.- Dipolo situado cerca de cuña recta. Trazado de rayos.

El trazado de rayos para una determinada dirección de salida, en el plano de diagrama xz, se esquematiza en la figura VI.8, siendo el significado de los números asignados a los diferentes rayos el siguiente:

- 1.- Rayo directo.
- 2.- Rayo reflejado.
- 3.- Rayo difractado ordinario.
- 4.- Rayo difractado con pendiente.

Hay que hacer notar que en el ejemplo considerado, la distancia, relativamente pequeña, del dipolo a la superficie produce una fuerte pendiente del campo incidente en el borde, lo que hace necesario, en este caso, incluir el rayo difractado con pendiente (rayo 4). En la figura VI.9 se representa el campo total de la MUTD (con y sin difracción con pendiente) y la contribución de los diferentes rayos en la parte más significativa del diagrama de radiación en el plano xz.

Hay que hacer notar que la inclusión del rayo difractado con pendiente hace desaparecer las discontinuidades del límite de sombra y reflexión, fundamentalmente la primera.

El diagrama de radiación del dipolo de media longitud de onda, en el espacio libre, normalizado a la unidad en la dirección de máxima radiación, es:

$$\bar{E} = \frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} \frac{e^{jkr}}{r} \bar{\theta}$$

que, según puede apreciarse en la figura VI.9, está notablemente modificado por la presencia de la cuña y el efecto difractivo de la misma.

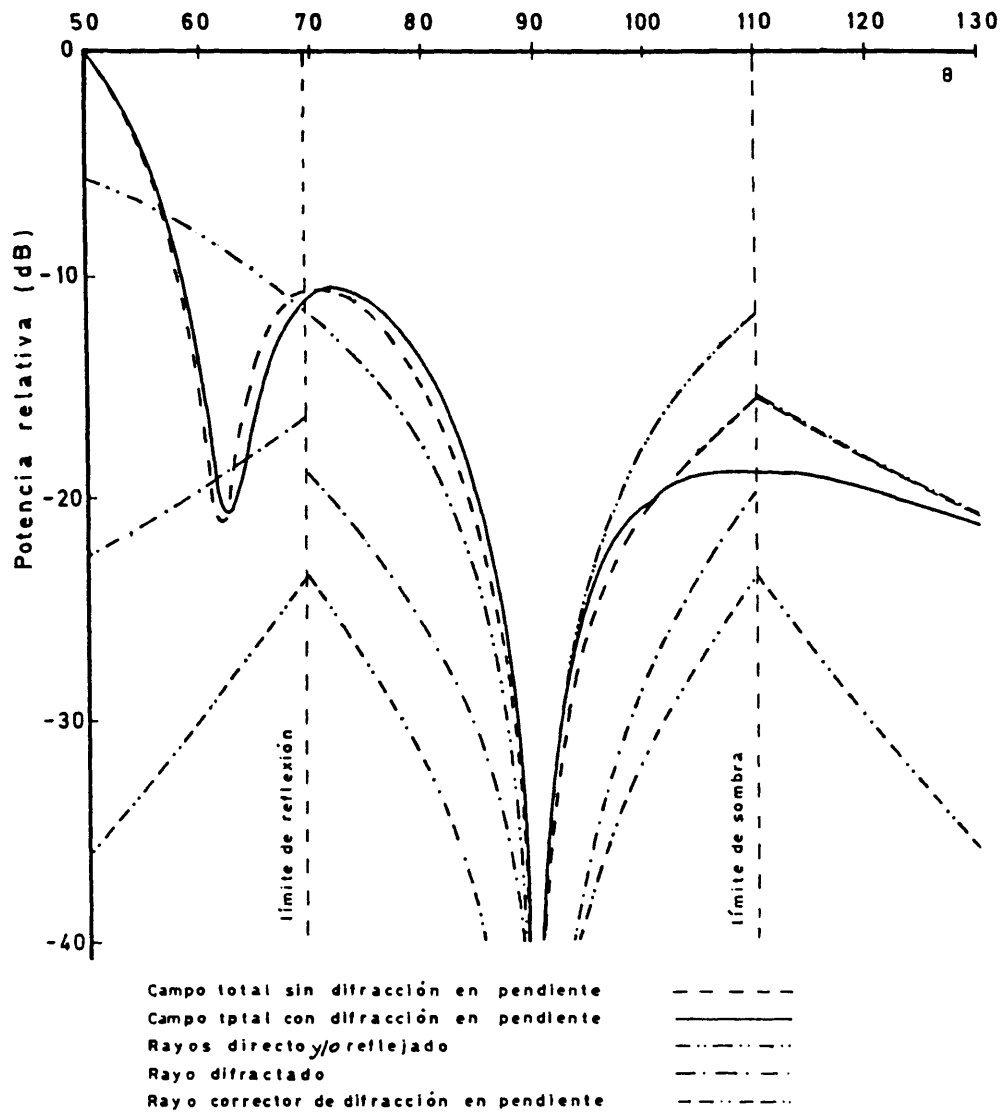


Fig. VI.9.- Diagrama de radiación de dipolo  $\lambda/2$  sobre cuña recta.



#### VI.4.- APLICACION A UN CASO REAL: SATELITE HIPPARCOS

Con objeto de mostrar la forma de aplicar la teoría geométrica de la difracción a antenas embarcadas, y comprobar su utilidad en la predicción de diagramas de radiación, hemos elegido el caso de las antenas de telemida y telemando del satélite Hipparcos, que es un proyecto actual de la Agencia Europea del Espacio.

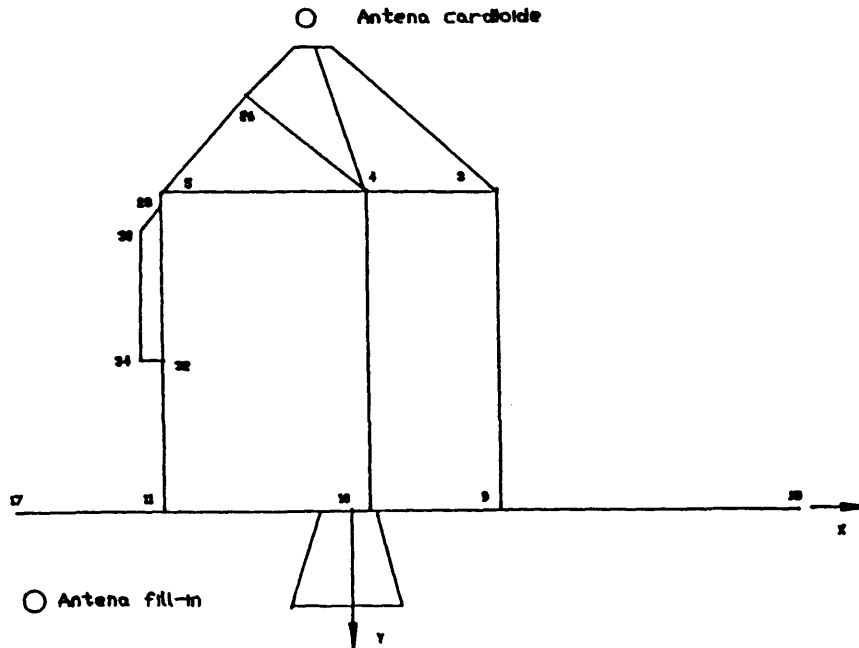


Fig. VI.10.- Esquema del sistema antenas-satélite.

En la figura VI.10 se ha representado un alzado del sistema antena-satélite. En ella se muestra el sistema de coordenadas global (x, y, z), estando el eje z orientado según la normal al plano del papel en sentido hacia afuera.

Dos antenas en banda S, una situada cerca de la parte su-

**Fig. VI.11.- Desarrollo de la estructura del satélite.**

En la figura VI.11 se esquematiza el desarrollo lateral de la estructura del satélite. En ella se indica la numeración de los vértices, de los bordes y de las caras, necesaria para la programación GTD, y para poder identificar un determinado rayo con el borde o cara donde se difracta o refleja. Las dimensiones de los bordes están comprendidas entre una y diez longitudes de onda.

En la programación GTD de este caso es necesario emplear dos paquetes distintos de trazado de rayos, uno para el estudio de la antena cardioide (parte superior), y otro para el estudio de la antena fill-in (parte inferior).

#### VI.4.1.- ESTUDIO DE LA ANTENA CARDIOIDE

La antena que hay que montar en la parte superior de la estructura es una antena en banda S, de baja ganancia, diseñada por INTA [47], que ha sido utilizada en diversos proyectos espaciales de la Agencia Europea del Espacio (ESA), (figura VI.12).

La antena aislada funciona con polarización circular, tiene un diagrama de radiación de tipo cardioide como el que se indica en la figura VI.13 (a la frecuencia  $f=2.063$  MHz) y cubre  $\pm 125^\circ$  desde el eje ( $\bar{z}' = -\bar{z}$ ;  $\theta' = 0$  coincide con la dirección  $\theta = 180^\circ$  de la figura VI.14), con una directividad igual o superior a -4 dBi en cada dirección. En la figura VI.13 los símbolos EL y ER se refieren a las directividades de las componentes de polarización circular a izquierdas y a derechas, respectivamente.

Cuando montamos dicha antena sobre el satélite, la radiación trasera interacciona con la estructura. Los efectos de reflexión y difracción producidos por dicha estructura puede llegar a ser importantes y degradar las características de radiación de la antena exigidas, por lo que dichos efectos deben ser estudiados, para poder optimizar la posición de la antena o modificar su diagrama de radiación.



Fig. VI.12.- Fotografía de la antena cardioide.

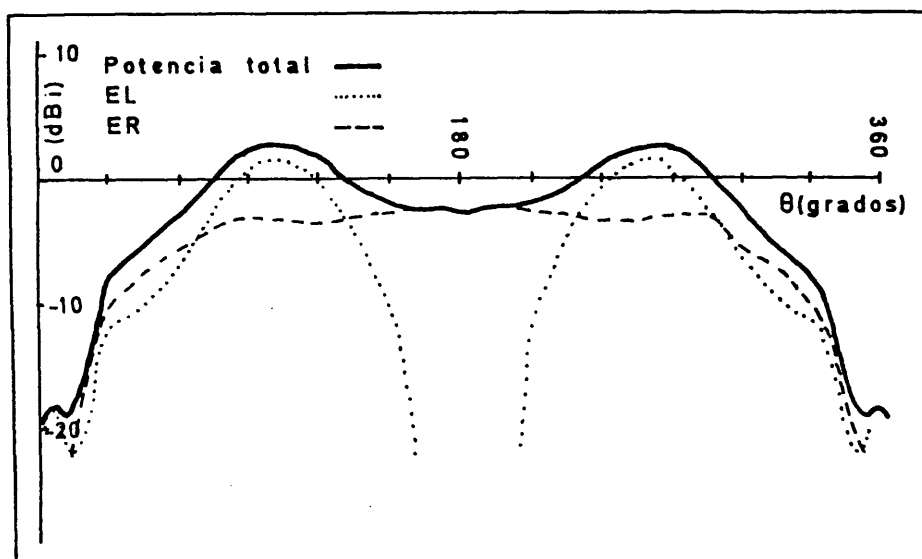


Fig. VI.13.- Diagrama de radiación de la antena cardiode aislada.

#### VI.4.1.1.- Trazado de rayos y sus regiones de influencia

El trazado de rayos para una determinada dirección de campo lejano se indica en la figura VI.14. El significado de los números asignados es el siguiente:

1. Rayo directo.
2. Rayo reflejado en alguna cara
- 3 a 11. Rayos simplemente difractados en bordes 1 a 19.
- 12 a 14. Rayos difractados-reflejados asociados a los paneles solares 1, 2 y 3.
15. Suma de rayos doblemente difractados por dos bordes

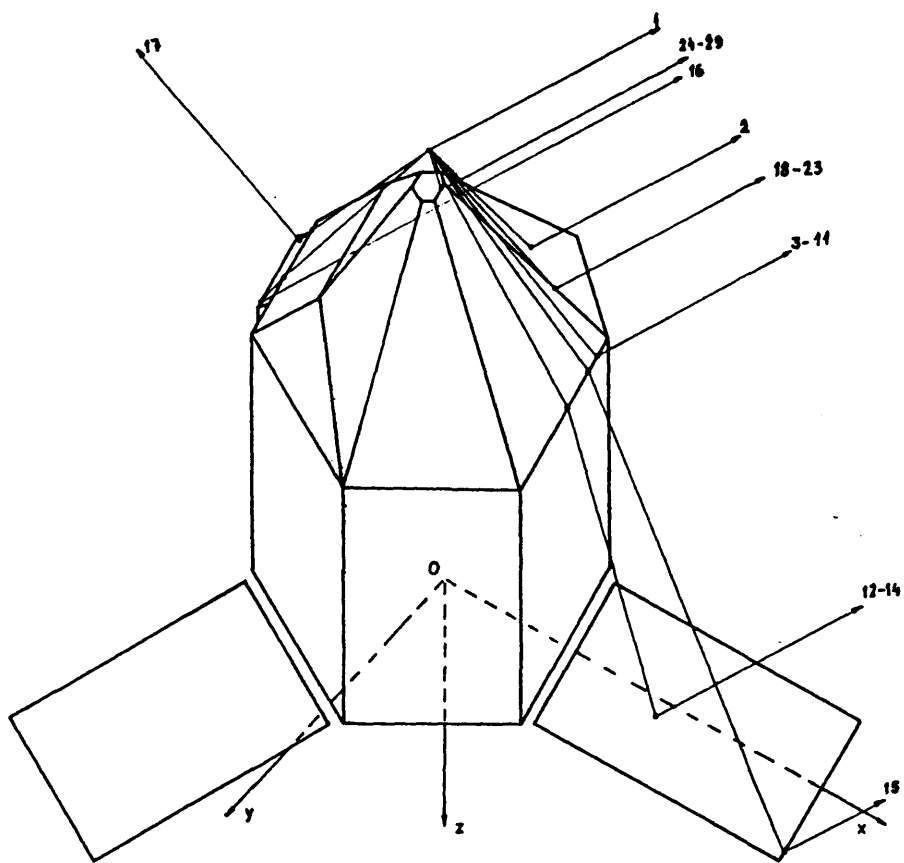


Fig. VI.14.- Trazado de rayos para la antena cardioide.

uno de la estructura y otro del panel solar.

16. Suma de rayos doblemente difractados por dos bordes de la estructura.

17. Otros rayos difractados en bordes y reflejados en algún apéndice de la estructura principal.

18 a 29. Rayos simplemente difractados por bordes 27 a 38.

Hay que señalar que, en general, todos los rayos indicados anteriormente no son necesarios para calcular el campo lejano en una dirección determinada, pero el programa de cálculo explora siempre su existencia.

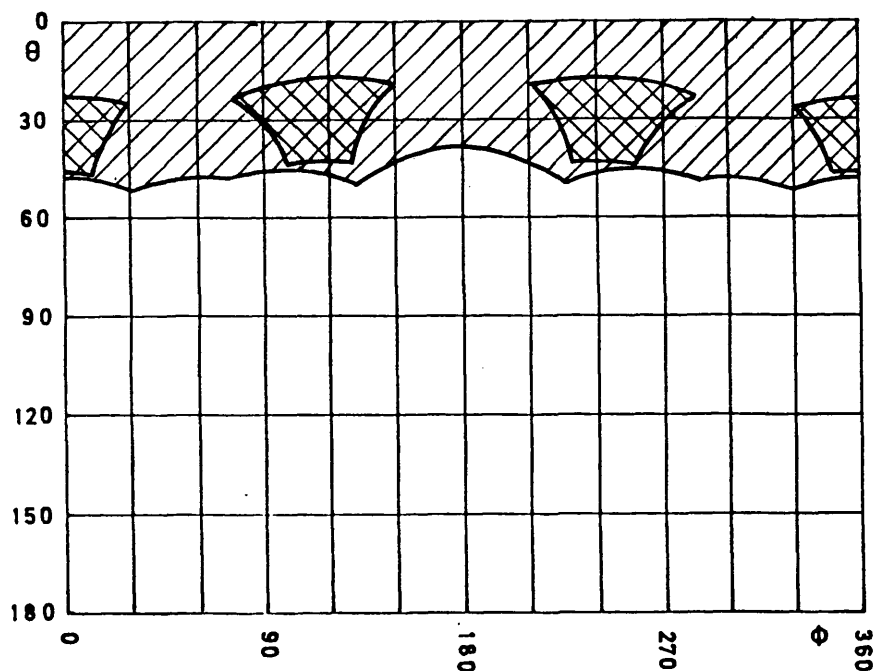


Fig. VI.15.- Zonas de sombra proyectada por el cuerpo del satélite y de los paneles solares, desde la posición baja del centro de fase de la antena cardioide.

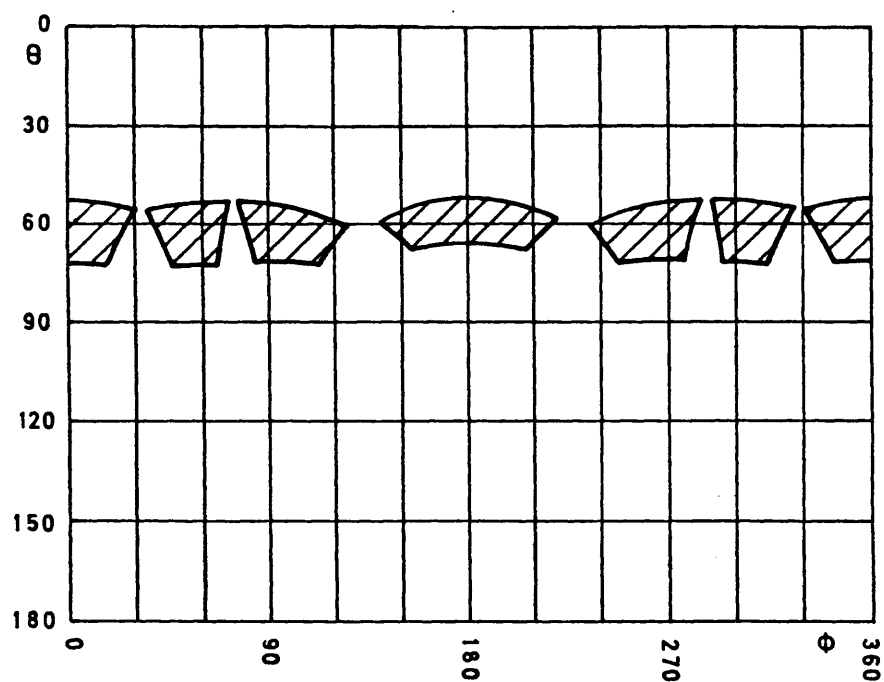


Fig. VI.16.- Zonas de reflexión producidas por el cuerpo del satélite, desde la posición baja del centro de fase de la antena cardioide.

Si suponemos que la antena está situada en una posición baja en la que no se ven los paneles solares y considerando únicamente los rayos de óptica geométrica (incidente y reflejados), se obtienen las zonas de sombra y reflexión de las figuras VI.15 y VI.16. De dichas figuras puede deducirse, en un principio, que la cobertura de la antena es mayor que la que se le exige ( $\pm 120^\circ$  desde su eje), montada en la estructura del satélite, pero habrá que controlar el nivel de los mínimos que aparezcan en el diagrama de radiación. Dichos mínimos, debidos a las reflexiones en la estructura, se sitúan en la región de cobertura de la antena, según se puede observar en la figura VI.16.



#### VI.4.1.2.- Resultados teórico-experimentales sobre modelo simplificado

Con el objetivo de estudiar la influencia de la estructura superior del satélite sobre las características de radiación de la antena cardioide y comprobar la validez del método GTD en la predicción del diagrama de radiación del sistema, se ha construido una maqueta (figura VI.17), en material conductor, que responde a un modelo simplificado de la estructura real y que ha sido medida en la base de medidas de antenas en campo abierto del INTA.

El trazado de rayos es el mismo que el efectuado en la estructura completa (figura VI.14), exceptuando los rayos referentes a paneles solares.

Los resultados teórico-experimentales que se obtienen, si se considera el caso peor (el corte  $\phi=0^\circ$  y  $\theta$  variando entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ ), aparecen representados en las figuras VI.18 y VI.19, donde se ha considerado una posición alta y otra baja de la antena, respectivamente. La última posición corresponde a una posición óptima.

En la figura VI.20 se muestran los resultados de la amplitud de la componente  $E_\phi$ , en la posición alta, representados por ordenador. El asterisco representa el campo resultante de todos los rayos considerados. Cada número hace referencia a la componente del rayo correspondiente (según la nomenclatura de la figura VI.14). Para los rayos con número de asignación superior al 10 (que se marca con un "0"), se les hace corresponder una letra del alfabeto (desde la A hasta la Z). En dicha representación, a las amplitudes menores que -40 dB respecto del máximo se les asigna un valor de -40 dB y se imprime en abscisas el número del primer rayo encontrado con dicho nivel de amplitud (o inferior).

De las figuras mencionadas anteriormente puede concluirse, en primer lugar, la buena concordancia entre los resultados



Fig. VI.17.- Maqueta experimental para la antena cardioide.

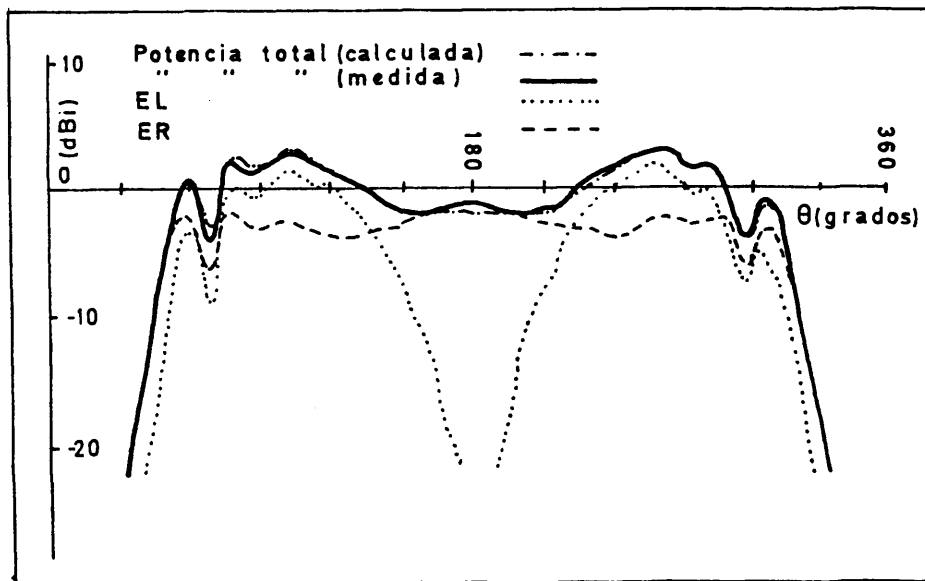


Fig. VI.18.- Directividad de la antena cardioide, con estructura, para posición no optimizada y comparación con los resultados experimentales.

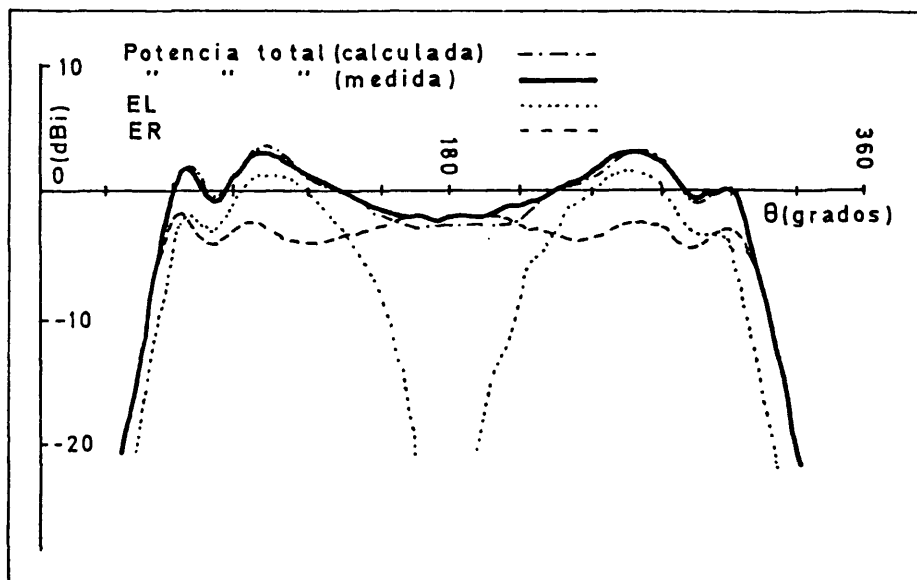


Fig. VI.19.- Directividad de la antena cardioide, con estructura, para posición optimizada. Comparación con resultados experimentales.

teóricos y experimentales, lo que demuestra que la GTD, en la versión MUTD elegida, es una buena herramienta para la predicción del diagrama de radiación del sistema antena satélite. Por otro lado, aunque con la antena en la posición más alta el límite de sombra está más lejos que en la más baja, los mínimos relativos que aparecen en aquella posición, tanto en la polarización principal como en la potencia total, no son aceptables, dadas las especificaciones de la antena. En la posición más baja dichos mínimos son tolerables, constituyendo ésta la posición óptima dentro de las limitaciones que impone el montaje general.

La causa principal de deformación de diagramas de radiación la constituyen las reflexiones producidas sobre la estructura. Además, el efecto de la difracción en bordes cerca de los límites de sombra limita la cobertura de la antena.

Hay que hacer notar que la mayor diferencia existente entre los resultados teóricos y experimentales, situada en ángulos próximos a  $180^\circ$ , es debida a la no consideración del efecto de sombra de la propia antena.

#### VI.4.2.- ESTUDIO DE LA ANTENA INFERIOR. ANTENA FILL-IN

La antena que se sitúa desplegada en la parte inferior de la estructura, es una antena en banda S [47], de tipo logaritmo periódico (figura VI.21), cuyo diagrama de radiación se representa en la figura VI.22. Esta antena cubre un ángulo de  $\pm 85^\circ$  desde su eje ( $z'=z$ ), con una potencia superior a -4 dBi.

En la figura VI.23 se presenta un esquema de la parte inferior del satélite, mostrando la posición de la antena desplegada. En dicha figura aparecen la tobera, cónica, y los paneles solares, cuya influencia sí que será importante en el diagrama de radiación de la antena fill-in.

THE ELEMENTS OF PAYS FROM SOURCE NO. 1

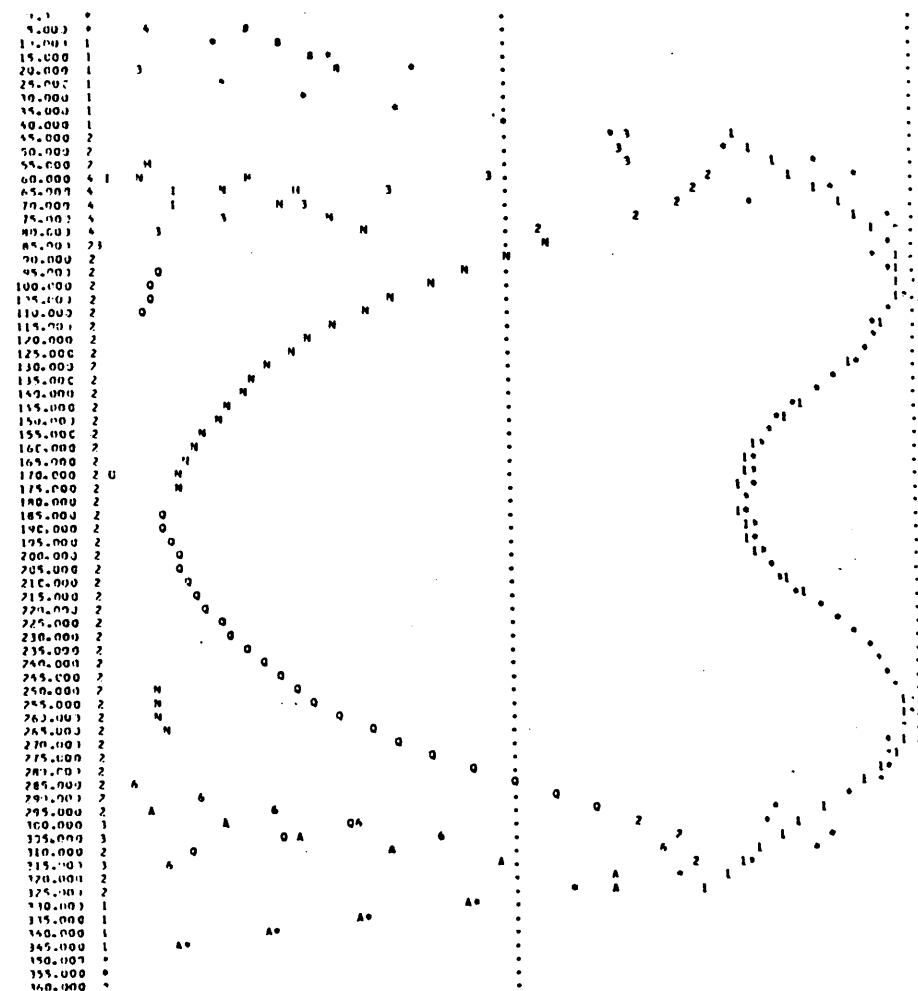


Fig. VI.20.- Contribución de los distintos rayos considerados a la componente  $E_x$  para posición no optimizada de la antena. Salida obtenida directamente por impresora.

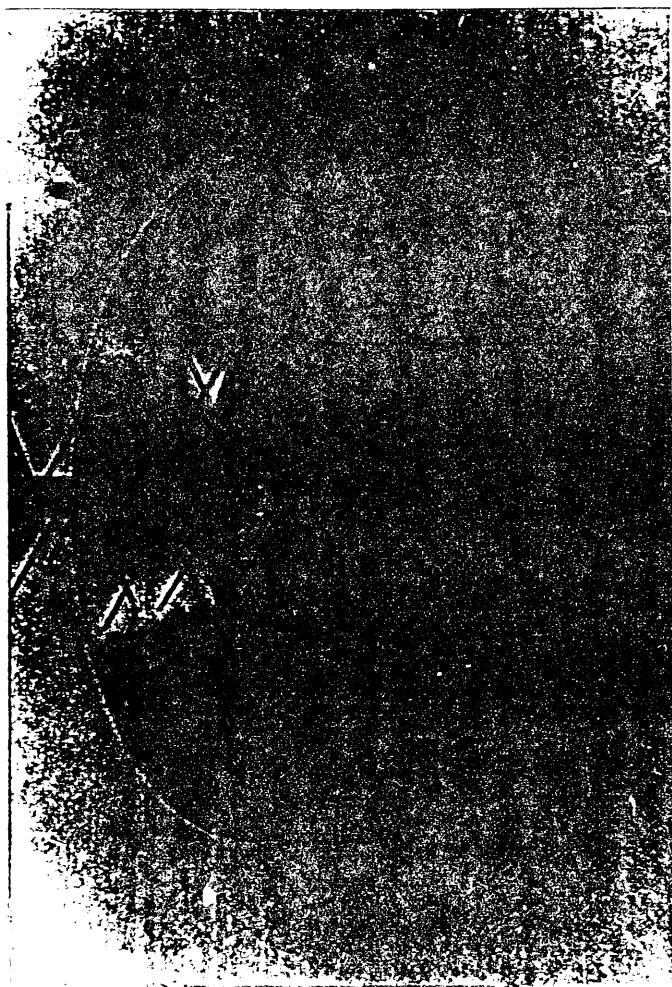


Fig. VI.21.- Fotografía de la antena logaritmo periódica.

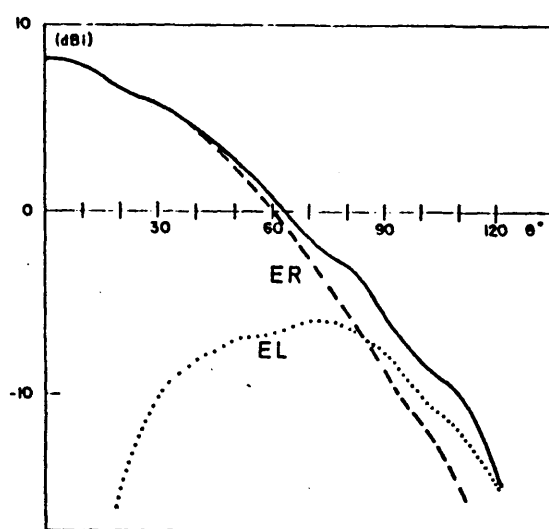


Fig. VI.22.- Diagrama de radiación de la antena logaritmo periódica.

VI.4.2.1.- Trazado de rayos y sus regiones de influencia

El trazado de rayos para la posición de la antena considerada se esquematiza en la figura VI.24. El significado de los números asignados a los diferentes rayos es el siguiente:

1. Rayo directo.
2. Rayos reflejados en superficies planas.
3. Rayo reflejado en cono.
4. Rayo doblemente reflejado en cono y plano.
- 5 a 8. Rayos simplemente difractados en borde del cono.

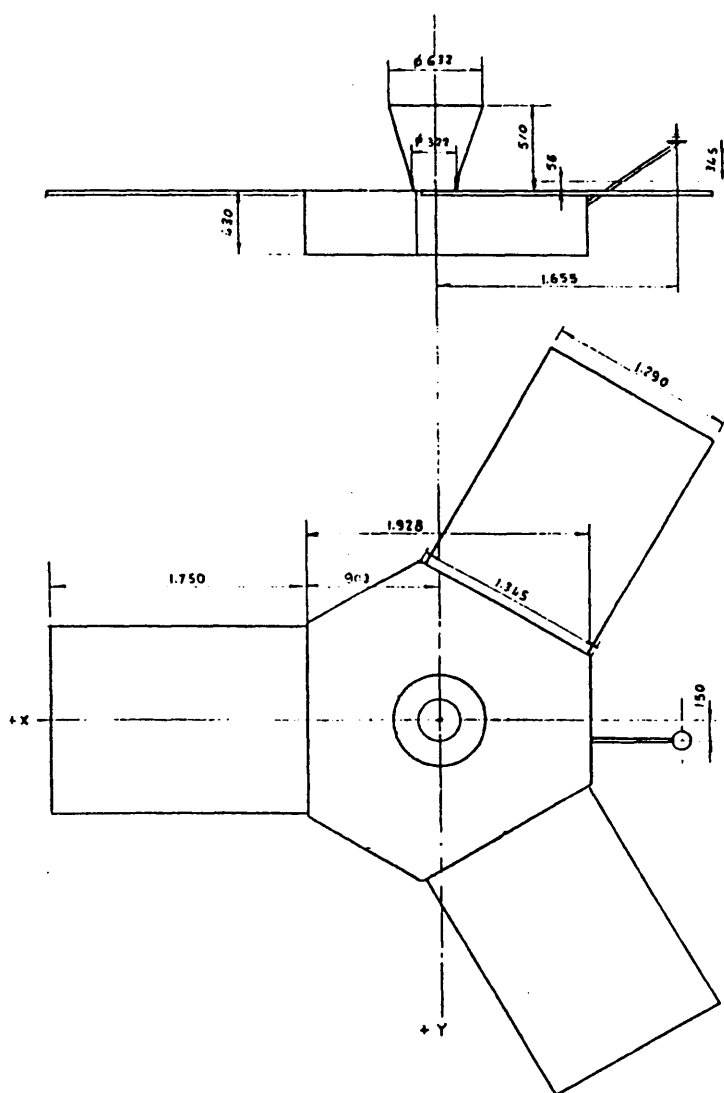


Fig. VI.23.- Esquema de la estructura inferior del satélite.



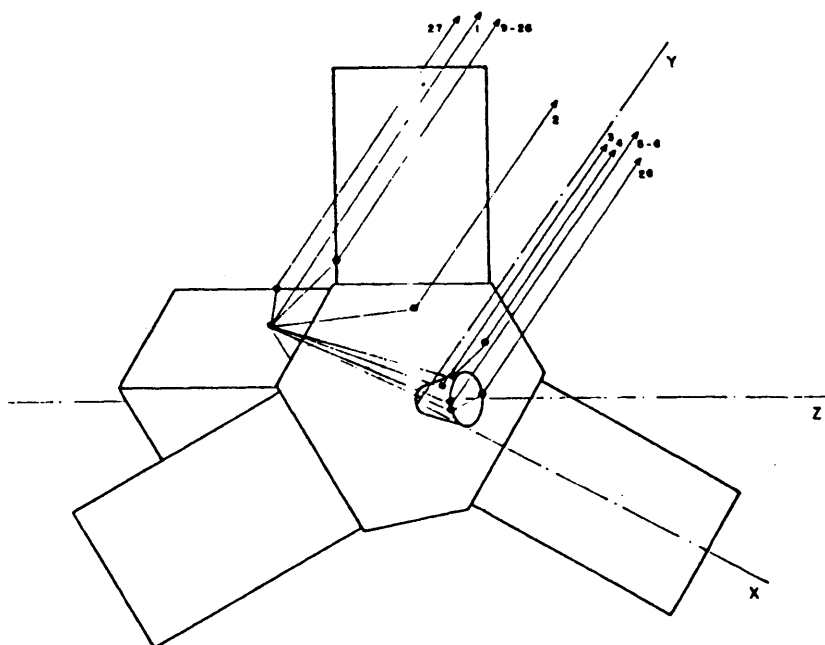


Fig. VI.24.- Trazado de rayos para la antena fill-in.

9 a 26. Rayos simplemente difractados en bordes rectos de la base.

27. Suma de rayos difractados en bordes laterales.

28. Rayo doblemente difractado en bordes.

Las regiones de sombra y reflexión de los rayos de óptica geométrica se han representado en las figuras VI.25 y VI.26. A esta antena se le exige cubrir  $\pm 65^\circ$  a partir del eje, cuando está montada sobre la estructura, con una directividad total superior a -4 dBi.

en lo que respecta a la polarización principal (en componentes circulares, la exigencia de cobertura es de -6 dBi.

En la figura VI.25 se puede comprobar que los límites de sombra se sitúan por encima de  $70^\circ$ . En cuanto a las regiones de reflexión (figura VI.26), se puede observar que la existencia de rayos reflejados en la base del satélite y en los paneles solares, en direcciones  $\theta < 70^\circ$ , puede dar lugar a mínimos que degraden la cobertura de la antena.

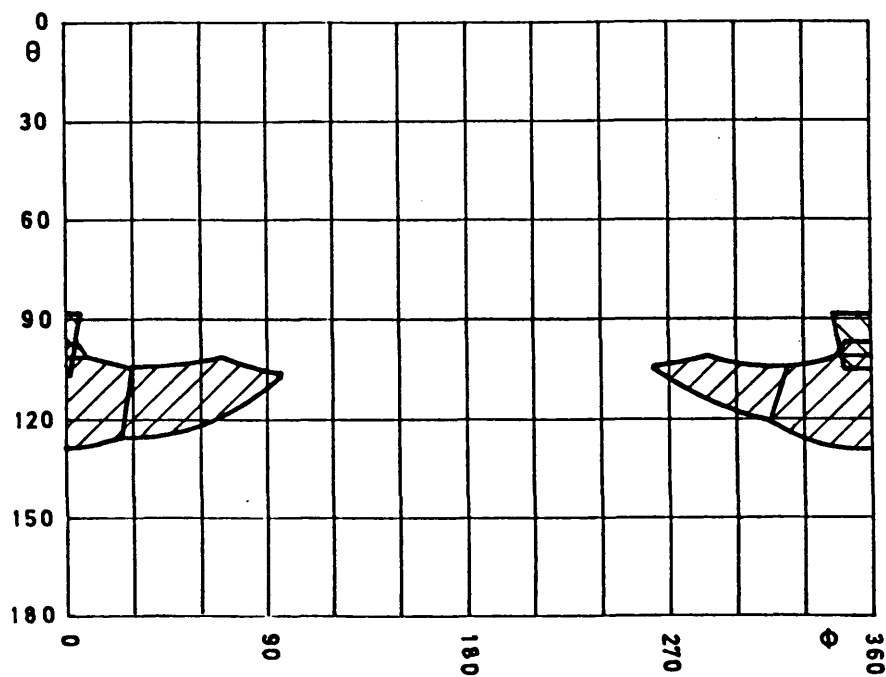


Fig. VI.25.- Zonas de sombra proyectada por el cuerpo del satélite, paneles solares y tobera, desde la posición del centro de fase de la antena fill-in.

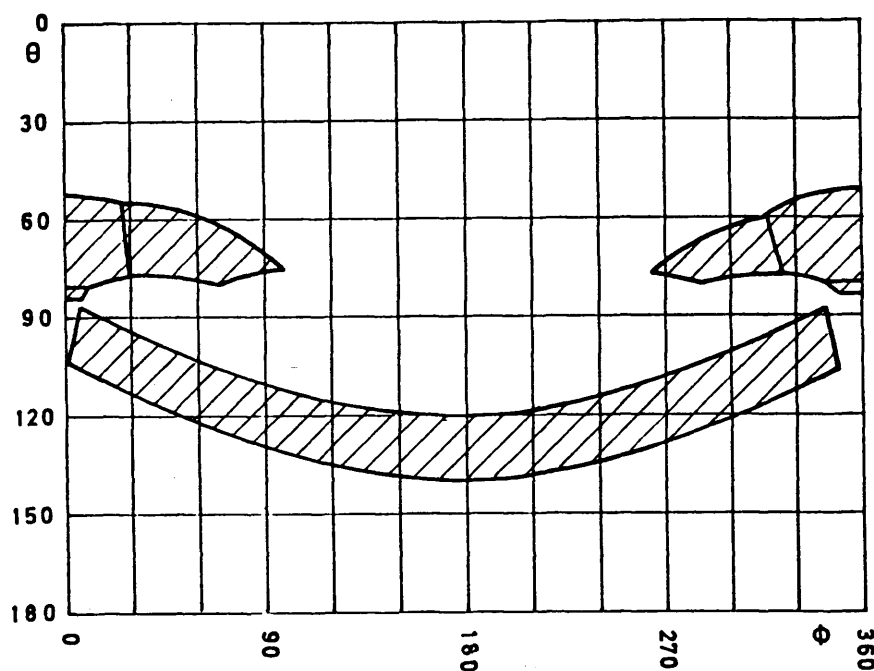


Fig. VI.26.- Zonas de reflexión producidas por el cuerpo del satélite, paneles solares y tobera, desde la posición del centro de fase de la antena fill-in.

#### VI.4.2.2.- Estudio teórico-experimental

Con el fin de estudiar la degradación del diagrama de radiación de la antena fill-in en presencia de estructura, se ha elaborado un modelo matemático, basado en la GTD, con el trazado de rayos de la figura VI.24, y una maqueta según el esquema de la figura VI.23, que ha sido medida en la base de antenas del INTA.

En las figuras VI.27 y VI.28 se presentan los resultados teórico-experimentales para la polarización circular principal de

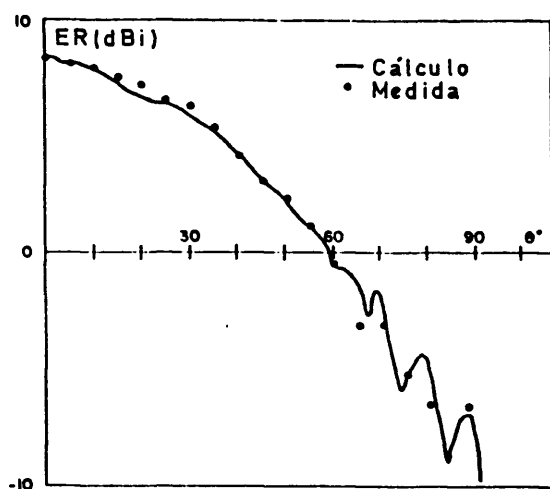


Fig. VI.27.- Polarización principal de la antena fill-in, con estructura, para  $\phi = 90^\circ$ .

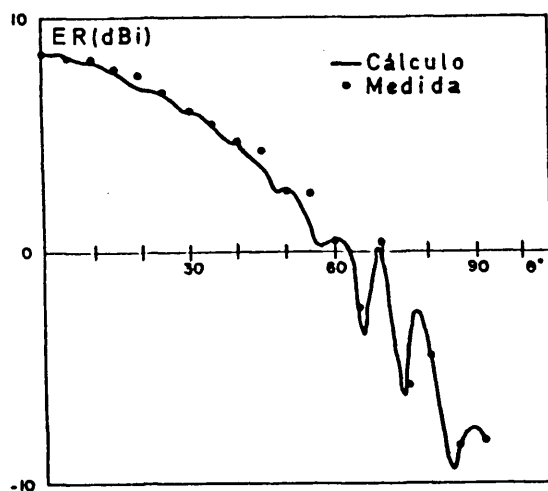


Fig. VI.28.- Polarización principal de la antena fill-in, con estructura, para  $\phi = 330^\circ$ .

la antena con estructura en los planos de diagrama  $\phi=90^\circ$  y  $\phi=330^\circ$ , que constituyen planos paralelos a un panel solar y a uno de los bordes de la base, respectivamente.

En el caso  $\phi=330^\circ$ , considerado como caso peor, puede observarse un mínimo, cerca de  $\theta=65^\circ$ , en el que la antena puede dejar de cumplir especificaciones, por lo que dicho mínimo debe ser controlado. Mediante la realización de medidas sobre la maqueta, efectuando un barrido en  $\phi$ , alrededor de  $\theta=65^\circ$ , se ha podido comprobar que la antena cubre un ángulo de  $\pm 65^\circ$  alrededor de su eje

Tanto en la figura VI.27, como en la VI.28, puede observarse una buena concordancia entre los resultados del modelo GTD y la experiencia. En el caso del plano  $\phi=90^\circ$  y en sus proximidades, la principal causa de la degradación del diagrama es la reflexión y difracción de la radiación en los paneles solares.

En el plano de diagrama  $\phi=330^\circ$  y en sus proximidades, la causa más importante que motiva la deformación del diagrama de radiación es la reflexión en la base del satélite.

## CONCLUSIONES

La utilización de la técnica de "rayos" en el estudio de un problema de difracción electromagnética, en alta frecuencia, convierte el problema original en otro fundamentalmente geométrico. La más antigua de dichas técnicas, la óptica geométrica, introduce el concepto de rayo y es de fácil aplicación, pero tiene el inconveniente fundamental de predecir campo nulo en la región de sombra de los obstáculos y en las regiones de cáusticas de rayos reflejados. La óptica física sirve como alternativa para solucionar el segundo defecto mencionado de la óptica geométrica, pero no es capaz de solucionar el primero, siendo tanto más imprecisa cuanto más nos alejamos de la dirección especular. Sin embargo, la GTD, descrita como extensión de la óptica geométrica para incluir los rayos difractados, soluciona el problema de las regiones de campo nulo de la óptica geométrica. La transición de las regiones de luz a las de sombra se hace de una manera continua, utilizando la formulación uniforme (UTD) que ha sido expuesta para obstáculos conductores.

La difracción en vértice de borde, deducida de un concepto de corrientes fundamentado en la teoría física de la difracción, se da en forma de campo electromagnético de rayo, para sumarse al campo del rayo difractado en borde, lo que hace dicha solución muy útil a la hora de introducirla en un programa de computador. Lo mismo ocurre con la difracción en pendiente (MUTD), cuyo campo asociado se suma al campo del rayo difractado ordinario. Para el caso de cáusticas de rayos difractados se sugiere una solución integral fundamentada en corrientes equivalentes o factores de corrección.

La finalidad perseguida en la concepción "modular" del programa de cálculo desarrollado, basado en la teoría geométrica de la difracción expuesta, ha sido la de predecir las deformaciones de las antenas de alta frecuencia embarcadas en los complejos vehículos espaciales, que pueden ser descompuestos en un conjunto de elementos simples tales como superficies planas y curvas con

bordes, y ha resultado ser de gran efectividad en los casos a los que se ha aplicado. La comprensión física del mecanismo de dispersión de cada problema en estudio queda enormemente facilitada mediante representaciones gráficas adecuadas.

Las investigaciones referentes a métodos de alta frecuencia aplicados a sistemas radiantes apuntan hacia la combinación de métodos GTD, óptica física y técnicas espectrales que, utilizando la relación existente entre la transformada de Fourier del campo lejano disperso y las corrientes de superficie de los dispersores, permiten identificar las deformaciones sobre éstos y actuar interactivamente, sobre los mismos, a la vista de los diagramas de radiación simulados. Las presentes técnicas cobran especial interés en el estudio de los cada vez más sofisticados sistemas de antenas de reflector para comunicaciones vía satélite.

La teoría geométrica de la difracción desarrollada en el espacio real puede ser aplicada a haces gaussianos que representan ondas localmente planas e inhomogéneas, utilizando el concepto de punto fuente compleja introducido por Deschamps [6]. Esta es una de las próximas tareas a realizar para mejorar el programa de computador desarrollado.

## APENDICE AI

### TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS ASOCIADAS A FORMULAS EMPLEADAS

#### AI.1.- NOMENCLATURA UTILIZADA PARA LOS OPERADORES VECTORIALES

En el actual Apéndice se ha aceptado el simbolismo de Einstein, según el cual, la repetición de un índice en un término suple al símbolo  $\Sigma$  de sumatorio; es decir, un vector  $\bar{e}$  puede ponerse en la forma:

$$\bar{e} = e_i \bar{u}_i \quad (A1.1)$$

donde  $e_i$  son sus componentes y  $\bar{u}_i$  los vectores unitarios coordinados.

En estas condiciones, los operadores vectoriales habituales se expresan de la siguiente manera:

$$\text{DIVERGENCIA: } \bar{\nabla} \cdot \bar{e} = \frac{\partial e_i}{\partial x_i}$$

$$\text{ROTACIONAL: } \bar{\nabla} \times \bar{e} = X_i \bar{u}_i$$

$$\text{siendo } X_i = \frac{\partial e_j}{\partial x_k} - \frac{\partial e_k}{\partial x_j}$$

donde a la sucesión  $i=1, 2, 3$  corresponden las  $j=2, 3, 1$ ;  $k=3, 1, 2$  respectivamente.

$$\text{ROTACIONAL DEL ROTACIONAL: } \bar{\nabla}^2 = \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times$$



$$\text{GRADIENTE: } \nabla A = \frac{\partial A}{\partial x_i} \bar{u}_i$$

$$\text{LAPLACIANA ESCALAR: } \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}$$

$$\text{LAPLACIANA VECTORIAL: } \Delta \bar{e} = (\Delta \bar{e}_i) \bar{u}_i$$

#### AI.2.- DEDUCCION DE LA ECUACION DE ONDAS(3.7)

Si el campo eléctrico  $\bar{E}$  se considera descompuesto en la forma:

$$\bar{E} = e^{-jkL} \bar{e}$$

donde  $L$  y  $\bar{e}$  son dos funciones (escalar y vectorial respectivamente) del vector de posición  $R$ , la ecuación de ondas (3.1) equivale inicialmente a:

$$k^2 \bar{e} - \frac{\bar{\nabla}^2 (e^{-jkL} \bar{e})}{e^{-jkL}} = 0 \quad (A1.2)$$

Ahora bien, aplicando a  $\bar{\nabla}^2$  la conocida relación vectorial:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{a} = \nabla(\bar{\nabla} \cdot \bar{a}) - \Delta \bar{a}$$

se obtiene:

$$\bar{\nabla}^2 (e^{-jkL} \bar{e}) = \nabla[\bar{\nabla} \cdot (e^{-jkL} \bar{e})] - \Delta (e^{-jkL} \bar{e}) \quad (A1.3)$$

##### AI.2.1.- DESARROLLO DE $\bar{\nabla} \cdot (e^{-jkL} \bar{e})$

Teniendo en cuenta (A1.1)

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot (e^{-jkL} \bar{e}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (e^{-jkL} e_i) = e^{-jkL} \left[ \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - jk \frac{\partial L}{\partial x_i} e_i \right] = \\ &= e^{-jkL} [\bar{\nabla} \cdot \bar{e} - jk(\nabla L \cdot \bar{e})]\end{aligned}$$

AI.2.2.- DESARROLLO DE  $\nabla[\bar{\nabla} \cdot (e^{-jkL} \bar{e})]$

Aplicando el operador gradiente a la expresión anterior queda:

$$\nabla[\bar{\nabla} \cdot (e^{-jkL} \bar{e})] = e^{-jkL} [\nabla(\bar{\nabla} \cdot \bar{e}) - jk \nabla(\nabla L \cdot \bar{e}) - jk \nabla L (\bar{\nabla} \cdot \bar{e}) - k^2 \nabla L (\nabla L \cdot \bar{e})]$$

En consecuencia,

$$-\frac{\nabla[\bar{\nabla} \cdot (e^{-jkL} \bar{e})]}{e^{-jkL}} = k^2 \nabla L (\nabla L \cdot \bar{e}) + jk [\nabla L (\bar{\nabla} \cdot \bar{e}) + \nabla(\nabla L \cdot \bar{e})] - \nabla(\bar{\nabla} \cdot \bar{e}) \quad (AI.4)$$

AI.2.3.- DESARROLLO DE  $\Delta(e^{-jkL} \bar{e})$

En virtud de la definición de la laplaciana vectorial:

$$\Delta(e^{-jkL} \bar{e}) = \Delta(e^{-jkL} e_i) \bar{u}_i$$

además,

$$\Delta(e^{-jkL} e_i) = \frac{\partial^2 (e^{-jkL} e_i)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 (e^{-jkL} e_i)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 (e^{-jkL} e_i)}{\partial x_3^2}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (e^{-jkL} e_i)}{\partial x_1^2} &= e^{-jkL} \frac{\partial^2 e_i}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial e^{-jkL}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x_1} + e_i \frac{\partial^2 e^{-jkL}}{\partial x_1^2} = \\ &= e^{-jkL} \left[ \frac{\partial^2 e_i}{\partial x_1^2} - 2jk \frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x_1} - \left\{ k^2 \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right)^2 + jk \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \right\} e_i \right]\end{aligned}$$

y agrupando los términos correspondientes a  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ :

$$\Delta(e^{-jkL} e_i) = e^{-jkL} [\Delta e_i - 2jk \nabla L \cdot \nabla e_i - k^2 (\nabla L \cdot \nabla L) e_i - jk \Delta L e_i]$$

Finalmente, multiplicando por  $\bar{u}_i$  y sumando respecto a  $i$  se obtiene:

$$\frac{\Delta(e^{-jkL} e_i) \bar{u}_i}{e^{-jkL}} = \Delta \bar{e} - 2jk (\nabla L \cdot \nabla) \bar{e} - k^2 (\nabla L \cdot \nabla L) \bar{e} - jk \Delta L \bar{e} \quad (A1.5)$$

Sustituyendo (A1.5) y (A1.4) en (A1.3) y, a continuación en (A1.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} & k^2 [\bar{e} - (\nabla L \cdot \nabla L) \bar{e} + \nabla L (\nabla L \cdot \bar{e})] + \\ & jk [\nabla L (\bar{\nabla} \cdot \bar{e}) + \nabla (\nabla L \cdot \bar{e}) - 2 (\nabla L \cdot \bar{\nabla}) \bar{e} - \Delta L \bar{e}] + \\ & [\Delta \bar{e} - \nabla (\bar{\nabla} \cdot \bar{e})] = 0 \end{aligned}$$

## APENDICE AII

### MODIFICACIONES DEL FRENTE DE ONDAS DE UN RAYO EN LA REFLEXION

#### AII.1.- MATRICES DE CURVATURA DEL FRENTE DE ONDA INCIDENTE Y DE LA SUPERFICIE REFLECTORA

Sea  $\bar{x}_3$  el vector unitario que corresponde a la dirección de un rayo que incide sobre una superficie  $\Sigma$  en el punto 0 donde  $\Sigma$  presenta dos radios de curvatura principales  $R_1$  y  $R_2$ . El ángulo que forma  $\bar{x}_3$  con la normal unitaria  $\bar{u}_3$  a  $\Sigma$  es  $\theta^i$  (fig. AII.1.a)

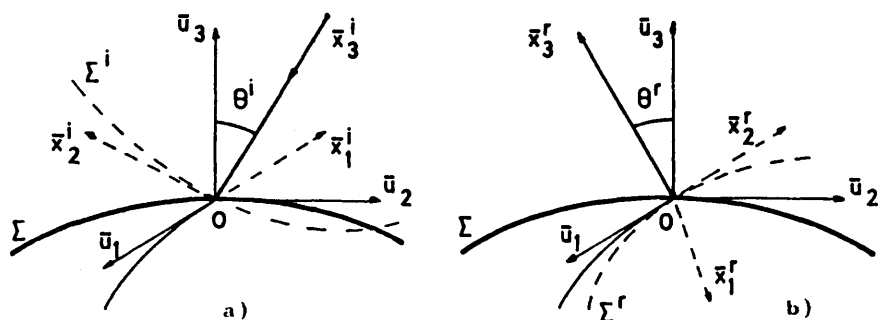


Fig.AII.1.- Referenciales ligados a las tres superficies que intervienen en la reflexión:  $\Sigma$ , reflectora;  $\Sigma^i$ , frente de onda incidente;  $\Sigma^r$ , frente de onda reflejado.

Si sobre  $\Sigma$  se eligen dos vectores ortonormales  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  perpendiculares a  $\bar{u}_3$  (direcciones principales sobre  $\Sigma$  en 0), un punto genérico de  $\Sigma$ , próximo a 0, vendrá definido por el vector de posición  $\bar{r}$  tal que

$$\bar{r} = \bar{r} - \frac{1}{2}(\bar{r} \cdot c \bar{r}) \bar{u}_3 \quad (A2.1)$$

siendo

$$\bar{t} = t_1 \bar{u}_1 + t_2 \bar{u}_2$$

un vector sobre el plano tangente a  $\Sigma$  en 0 que tiene las mismas componentes  $t_1$  y  $t_2$  según  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  respectivamente que el vector  $r$ .

Entonces, el segundo sumando

$$- \frac{1}{2} (\bar{t} \cdot c \bar{t}) \bar{u}_3 \quad (A2.2)$$

representará la separación, según  $\bar{u}_3$  de  $\Sigma$  respecto a su plano tangente. En una superficie convexa, esta separación será evidentemente negativa tal como se expresa en (A2.2). Además, el producto escalar  $\bar{t} \cdot c \bar{t}$  (donde  $c$  es una matriz de transformación del vector  $\bar{t}$ ), es una forma cuadrática que aproxima dicha superficie con un desarrollo de Taylor.

$c$  es la matriz de curvatura de  $\Sigma$  que, por ser simétrica, admite dos autovectores -las direcciones principales  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$ - y dos autovalores -los radios de curvatura principales  $\rho_1$  y  $\rho_2$ -.

Del mismo modo, si sobre el frente de ondas incidente  $\Sigma^i$  en 0 se eligen dos vectores ortonormales  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  (direcciones principales de  $\Sigma^i$  en 0), perpendiculares a  $\bar{x}_3$ , la fase transportada por dicho frente de ondas en el punto  $\bar{r}$  de  $\Sigma$  será  $kL(r)$  con

$$L(r) = z + \frac{1}{2} (\bar{x} \cdot Q^i \bar{x}) \quad (A2.3)$$

donde  $k$  es la constante de propagación,  $z$  la coordenada de 0 según  $\bar{x}_3$

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2$$

es un vector situado en el plano transversal al rayo incidente y  $Q^i$ , la matriz de curvatura del frente de onda incidente en 0.

#### AII.2.- MATRIZ DE RELACION ENTRE LAS MATRICES DE CURVATURA

La relación entre ambos sistemas de coordenadas: los asociados a la superficie reflectora  $\Sigma$  y al frente de onda incidente  $\Sigma^i$ , puede expresarse determinando las coordenadas  $(\bar{x}, z)$  de  $\bar{r}$  dado por (A2.1). Es fácil ver que dichas coordenadas vienen determinadas por:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \Omega \bar{r} \\ z &= \bar{r} \cdot \bar{r} - \frac{1}{2} \bar{r} \cdot c \bar{r} \cos \theta^i\end{aligned}\quad (A2.4)$$

La primera es evidente si  $\Omega$  es la matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \cdot \bar{u}_1 & \bar{x}_1 \cdot \bar{u}_2 \\ \bar{x}_2 \cdot \bar{u}_1 & \bar{x}_2 \cdot \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

que expresa la proyección de  $\bar{r}$  sobre un plano  $z = \text{cte.}$

En cuanto a la segunda, se deduce de (A2.1) multiplicándola escalarmente por  $\bar{x}_3$ :

$$\bar{r} \cdot \bar{x}_3 = \bar{r} \cdot \bar{x}_3 - \frac{1}{2} (\bar{r} \cdot c \bar{r}) \bar{u}_3 \cdot \bar{x}_3$$

pues es evidente que

$$z = \bar{r} \cdot \bar{x}_3; \quad \cos \theta^i = \bar{u}_3 \cdot \bar{x}_3$$

y en cuanto al primer término del segundo miembro, se puede suponer que

$$\bar{x}_3 = \bar{v} + \bar{w}$$

donde

$$\bar{v} = v_1 \bar{u}_1 + v_2 \bar{u}_2$$

es un vector paralelo al plano tangente a  $\Sigma$  en 0 y  $\bar{w}$  es normal a  $\Sigma$ . En tal caso, como  $\bar{w} \cdot \bar{t} = 0$ , se deduce

$$\bar{t} \cdot \bar{x}_3 = \bar{t} \cdot \bar{v}$$

Sustituyendo ahora la segunda de (A2.4) en (A2.3) se obtiene

$$L(\bar{r}) = \bar{v} \cdot \bar{t} + \frac{1}{2} (\bar{x} \cdot Q^i \bar{x} - \bar{t} \cdot c \bar{t} \cos \theta^i)$$

y haciendo lo mismo con la primera de (A2.4) en el primer término del paréntesis, éste se transforma en:

$$\bar{x} \cdot Q^i \bar{x} - \bar{t} \cdot c \bar{t} \cos \theta^i = \Omega \bar{t} \cdot Q^i (\Omega \bar{t}) - \bar{t} \cdot c \bar{t} \cos \theta^i \quad (A2.5)$$

Por otro lado, si  $\Omega^T$  es la matriz transpuesta de  $\Omega$ :

$$\Omega \bar{t} \cdot \bar{y} = (\Omega_{ij} t_j) y_i = t_j (\Omega_{ij} y_i) = \bar{t} \cdot \Omega^T \bar{y}$$

aplicado a (A2.5) conduce a:

$$\bar{x} \cdot Q^i \bar{x} - \bar{t} \cdot c \bar{t} \cos \theta^i = \bar{t} \cdot \Omega^T Q^i \Omega \bar{t} - \bar{t} \cdot c \cos \theta^i \bar{t} = \bar{t} \cdot \Gamma^i \bar{t}$$

siendo la matriz de relación  $\Gamma^i$ :

$$\Gamma^i = \Omega^T Q^i \Omega - c \cos \theta^i$$

con lo que  $L(r)$  se podrá expresar finalmente por:

$$L(\bar{r}) = \bar{v} \cdot \bar{t} + \bar{t} \cdot \Gamma^i \bar{t}$$

La fase será pues la suma de un término lineal

$$k \bar{v} \cdot \bar{r} = \bar{K}^i \bar{r}$$

donde  $\bar{x}^i$  es la proyección del vector  $kz\bar{u}_3$  sobre el plano tangente a  $Z$  en  $O$  y de un término cuadrático ligado a la matriz  $r^i$ .

### AII.3.- MATRIZ DE CURVATURA DEL FRENTE DE ONDA DEL RAYO REFLEJADO

Si se repite el proceso anterior para el frente de onda reflejado, se llega a un resultado análogo. Ahora bien, la condición de fase estacionaria aplicada a la reflexión exige que tanto los términos lineales como los cuadráticos (antes y después de la reflexión) coincidan, lo cual equivale a:

$$\begin{aligned} K^r &= K^i \\ K^r \Gamma^r &= K^i \Gamma^i \end{aligned} \quad (A2.6)$$

La primera condición de (A2.6) se traduce en la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión; sin embargo, teniendo en cuenta que el rayo incidente se dirige hacia  $O$ :

$$\bar{x}_3^i \cdot \bar{u}_3 = -\cos \theta^i$$

y que el reflejado se aleja de  $O$

$$\bar{x}_3^r \cdot \bar{u}_3 = \cos \theta^i$$

por lo tanto:

$$\Omega^r \Gamma^r \Omega^r - c \cos \theta^i = \Omega^i \Gamma^i \Omega^i + c \cos \theta^i$$

Eligiendo como referencial del rayo reflejado  $\bar{x}_j^r$ , el deducido como imagen del incidente  $\bar{x}_j^i$ , las matrices



$$\Omega^r = \Omega^i = \Omega$$

con lo que aplicando sucesivamente los operadores  $(\Omega^{-1})^T$  por la izquierda y  $\Omega^{-1}$  por la derecha a la expresión anterior, se obtiene:

$$Q^r = Q^i + 2 \cos \theta^i (\Omega^{-1})^T c \Omega^{-1} \quad (A2.7)$$

De esta expresión se van a deducir los radios de curvatura principales asociados al frente de onda reflejado.

En primer lugar, como los ejes  $\bar{x}_j^i$  elegidos son los correspondientes a las direcciones principales,  $Q^i$  tendrá forma diagonal y sus términos serán las curvaturas principales de  $\Sigma^i$  en  $O$ , es decir:

$$Q^i = \begin{bmatrix} 1/\rho_1^i & 0 \\ 0 & 1/\rho_2^i \end{bmatrix} \quad (A2.8)$$

Lo mismo se podría decir de  $c$ , con lo que:

$$c = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} \quad (A2.9)$$

Además,

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{|\Omega|} \begin{bmatrix} \Omega_{22} & -\Omega_{12} \\ -\Omega_{21} & \Omega_{11} \end{bmatrix}$$

de donde

$$c \Omega^{-1} = \frac{1}{|\Omega|} \begin{bmatrix} \Omega_{22}/R_1 & -\Omega_{12}/R_1 \\ -\Omega_{21}/R_2 & \Omega_{11}/R_2 \end{bmatrix}$$

que multiplicada por la transpuesta de  $\Omega^{-1}$  conduce a:

$$(\Omega^{-1})^T \Omega^{-1} = \frac{1}{|\Omega|^2} \begin{bmatrix} \frac{\Omega_{22}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2}{R_2} & -\frac{\Omega_{22}\Omega_{12}}{R_1} - \frac{\Omega_{21}\Omega_{11}}{R_2} \\ -\frac{\Omega_{22}\Omega_{12}}{R_1} - \frac{\Omega_{21}\Omega_{11}}{R_2} & \frac{\Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{11}^2}{R_2} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo este resultado y (A2.8) en (A2.7), se obtiene:

$$\begin{aligned} q_{11}^r &= \frac{1}{\rho_1^i} + \frac{2 \cos \theta^i}{|\Omega|^2} \left( \frac{\Omega_{22}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2}{R_2} \right) \\ q_{12}^r &= -\frac{2 \cos \theta^i}{|\Omega|^2} \left( \frac{\Omega_{22}\Omega_{12}}{R_1} + \frac{\Omega_{11}\Omega_{21}}{R_2} \right) \\ q_{22}^r &= \frac{1}{\rho_2^i} + \frac{2 \cos \theta^i}{|\Omega|^2} \left( \frac{\Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{11}^2}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (A2.10)$$

#### AII.4.- RADIOS DE CURVATURA PRINCIPALES DEL RAYO REFLEJADO

Sin embargo, los radios de curvatura principales correspondientes al frente de onda reflejado,  $\rho_1^r$  y  $\rho_2^r$ , son los autovectores de la transformación

$$Q^r \bar{x}_j^r$$

es decir, los valores de  $\lambda$  que se deducen de:

$$\begin{vmatrix} q_{11}^r - \lambda & q_{12}^r \\ q_{12}^r & q_{22}^r - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

que equivale a

$$\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

si

$$a = Q_{11}^r + Q_{22}^r ; \quad b = Q_{11}^r Q_{22}^r - (Q_{12}^r)^2$$

Pero teniendo en cuenta (A2.10) y los símbolos definidos en (3.16)

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi_1^i} + \frac{1}{\varphi_2^i} \right) + \frac{\cos \theta^i}{|\Omega|^2} \left( \frac{\Omega_{22}^2 + \Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2 + \Omega_{11}^2}{R_2} \right) =$$

$$f_0 + \frac{1}{2} w F_0$$

Del mismo modo, en el radicando:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = \left(f_0 + \frac{1}{2} w F_0\right)^2 - \left\{ \frac{1}{\varphi_1^i \varphi_2^i} + w \left[ \frac{1}{\varphi_1^i} \left( \frac{\Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{11}^2}{R_2} \right) + \frac{1}{\varphi_2^i} \left( \frac{\Omega_{22}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2}{R_2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. w^2 \left[ \left( \frac{\Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{11}^2}{R_2} \right) \left( \frac{\Omega_{22}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2}{R_2} \right) - \left( \frac{\Omega_{22} \Omega_{12}}{R_1} + \frac{\Omega_{11} \Omega_{21}}{R_2} \right)^2 \right] \right\} =$$

$$A_0 + w A_1 + w^2 A_2$$

donde

$$A_0 = f_0^2 - \frac{1}{\varphi_1^i \varphi_2^i} = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{\varphi_1^i} \right)^2 + \frac{2}{\varphi_1^i \varphi_2^i} + \left( \frac{1}{\varphi_2^i} \right)^2 - \frac{4}{\varphi_1^i \varphi_2^i} \right] = 4 \left( \frac{1}{\varphi_1^i} - \frac{1}{\varphi_2^i} \right)^2 = f_1^2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi_1^i} + \frac{1}{\varphi_2^i} \right) \left( \frac{\Omega_{22}^2 + \Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2 + \Omega_{11}^2}{R_2} \right) - \frac{1}{\varphi_1^i} \left( \frac{\Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{11}^2}{R_2} \right) - \frac{1}{\varphi_2^i} \left( \frac{\Omega_{22}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2}{R_2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi_1^i} - \frac{1}{\varphi_2^i} \right) \left( \frac{\Omega_{22}^2 - \Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2 - \Omega_{11}^2}{R_2} \right) = f_1 F_1$$

$$A_2 = \frac{1}{4} F_0^2 - \left( \frac{\Omega_{12}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{11}^2}{R_2} \right) \left( \frac{\Omega_{22}^2}{R_1} + \frac{\Omega_{21}^2}{R_2} \right) + \left( \frac{\Omega_{22} \Omega_{12}}{R_1} + \frac{\Omega_{11} \Omega_{21}}{R_2} \right)^2 =$$

$$\frac{1}{4} F_0^2 - \frac{(\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12} \Omega_{21})^2}{R_1 R_2} = F_2$$

#### III.5.- DIRECCIONES PRINCIPALES DEL RAYO REFLEJADO

Finalmente, para determinar las direcciones principales del frente de onda reflejado en O, bastará resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1^r &= m \bar{x}_1^r + n \bar{x}_2^r \\ m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \bar{q}^r \bar{x}_1^r = \frac{1}{\varphi_1^r} \bar{x}_1^r$$

donde  $\bar{x}_1^r$  y  $\bar{x}_2^r$  pertenecen al referencial del rayo reflejado que, como se ha indicado anteriormente, corresponden a la imagen, respecto al plano reflector, del referencial ligado al rayo incidente:

$$\bar{x}_j^r = \bar{x}_j^i - 2(\bar{u}_3 \cdot \bar{x}_j^i) \bar{u}_3; \quad j = 1, 2$$

Por otra parte,  $\bar{x}_1^r$  es el vector unitario de una de las direcciones principales, concretamente la que corresponde al radio de curvatura  $\rho_1^r$ .

La resolución del sistema anterior conduce a:

$$\bar{x}_1^r = \frac{(q_{22}^r - 1/q_1^r) \bar{x}_1^r - q_{12}^r \bar{x}_2^r}{\sqrt{(q_{22}^r - 1/q_1^r)^2 + (q_{12}^r)^2}}$$

y la otra dirección principal vendrá dada por:

$$\bar{x}_2^r = \bar{x}_3^r \times \bar{x}_1^r$$

### APENDICE A III

#### ALGUNAS CONSIDERACIONES GEOMETRICAS RELATIVAS A PROBLEMAS PLANTEADOS EN ESTE ESTUDIO

En el desarrollo de la programación GTD es necesario hacer uso de conceptos geométricos referentes bien a la estructura de la superficie donde se produce la reflexión, bien a la propia determinación de los puntos de reflexión o difracción.

En el primer caso se ha creído oportuno recordar cómo se deducen las curvaturas y direcciones principales relativas a un punto sobre una superficie dada por una ecuación explícita  $z=f(x,y)$ .

Por otra parte, cuando se intenta encontrar el campo eléctrico magnético emitido por un manantial en una determinada dirección del espacio y en presencia de un conjunto de obstáculos, es frecuente tener que determinar un punto sobre una superficie reflectora donde un rayo procedente del manantial debe incidir para que después de reflejarse en ella salga en la dirección prevista.

Asímismo puede ser necesario determinar una doble difracción en dos bordes rectos, recto y circular o circular y recto (según sea el orden en que se efectúa la difracción). En tal caso, habrá que determinar los sucesivos puntos de difracción.

En situaciones muy especiales estos problemas pueden presentar una solución geométrica muy sencilla, sin embargo, en general no será así y habrá que preparar un algoritmo de cálculo rápido como es característico en la programación GTD.

A continuación se van a tratar estas tres cuestiones.

### AIII.1- CALCULO DE LAS CURVATURAS Y DIRECCIONES PRINCIPALES EN UN PUNTO DE UNA SUPERFICIE.

El propósito de este apartado es el de dar expresiones de las curvaturas de una superficie en un punto  $P$ , así como de los vectores que definen las direcciones principales de la misma en dicho punto, de una forma generalizada.

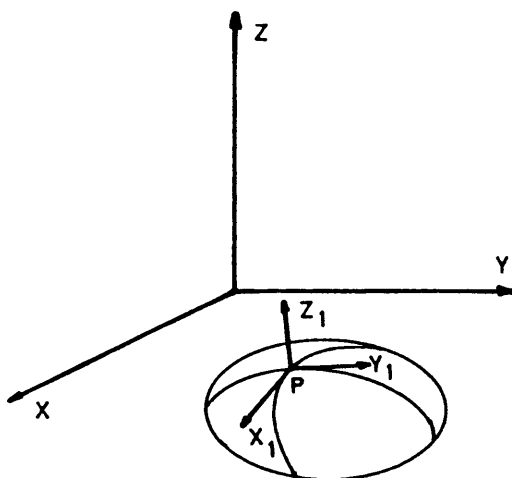


Fig. AIII.1 - Sistemas de ejes absoluto y relativo

Sea una superficie definida por la ecuación  $z=f(x,y)$ , en el sistema de coordenadas global  $x,y,z$  (fig. AIII.1). Hay que calcular las curvaturas principales de la superficie, así como las componentes de los vectores unitarios de las direcciones principales, en un punto  $P$  de la misma, cuyas coordenadas son  $x_p, y_p, z_p$  en el sistema de coordenadas global  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , conocidas la función y sus derivadas primeras y segundas en el punto  $P$ .

Para estudiar la superficie en el punto  $P$  definimos un sistema de referencia  $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ , con origen en  $P$ . Si tomamos  $z_1$  en

dirección de la normal a la superficie,  $x_1$  e  $y_1$  estarán en el plano tangente.

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

siendo  $f_x$  y  $f_y$  las derivadas parciales de  $f$  respecto de  $x$  e  $y$ .

Las componentes del vector unitario en dirección de la normal a la superficie en el punto  $P$  son, en el sistema  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$

$$n_x = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad n_y = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad \bar{z}_1 = \bar{n}$$

y por estar  $\bar{x}_1$  e  $\bar{y}_1$  en el plano tangente

$$\bar{x}_1 \times \bar{y}_1 = \bar{z}_1 = \bar{n} \quad (A3.1)$$

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{y}_1 = 0 \quad (A3.2)$$

$$|\bar{y}_1| = 1 \quad (A3.3)$$

El cambio de coordenadas vendrá dado por una relación de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + ((B)) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (A3.4)$$

siendo  $((B))$  una matriz de  $3 \times 3$  elementos cuyas columnas contienen las componentes de los vectores unitarios  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{y}_1$ ,  $\bar{z}_1$  en el sistema global.



$$\langle B \rangle = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Partiendo de las expresiones (A3.1), (A3.2) y (A3.3), se obtienen las cinco igualdades escalares siguientes:

$$b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22} = n_x$$

$$b_{12} b_{31} - b_{11} b_{32} = n_y$$

$$b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12} = n_z$$

$$b_{12}^2 + b_{22}^2 + b_{32}^2 = 1$$

$$b_{11} b_{12} + b_{21} b_{22} + b_{31} b_{32} = 0$$

Como una de las variables es arbitraria, eligiendo  $b_{32}=0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} & b_{21} &= -\frac{n_z n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} & b_{31} &= \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \\ b_{12} &= \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} & b_{22} &= -\frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \end{aligned} \quad (A3.5)$$

por lo que la matriz  $\langle B \rangle$  tomará la forma:

$$\langle\langle B \rangle\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{n_x n_z}{a} & \frac{n_y}{a} & n_x \\ -\frac{n_y n_z}{a} & -\frac{n_x}{a} & n_y \\ \frac{n_x^2 + n_y^2}{a} & 0 & n_z \end{pmatrix}$$

Si se dispone de la ecuación de la superficie  $z=f(x,y)$ , se podrán calcular las derivadas parciales primeras y segundas en un punto P de la superficie. Haciendo los cálculos correspondientes se obtiene:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} = \frac{b_{11}^2 f_{xx} + 2f_{xy} b_{11} b_{21} + b_{21}^2 f_{yy}}{b_{33} - b_{13} f_x - b_{23} f_y}$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2} = \frac{b_{12}^2 f_{xx} + 2f_{xy} b_{12} b_{22} + b_{22}^2 f_{yy}}{b_{33} - b_{13} f_x - b_{23} f_y} \quad (A3.6)$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{b_{11} b_{12} f_{xx} + (b_{12} b_{21} + b_{11} b_{22}) f_{xy} + b_{21} b_{22} f_{yy}}{b_{33} - b_{13} f_x - b_{23} f_y}$$

Desarrollando en serie de Taylor podemos aproximar la superficie  $f(x,y)$  en las proximidades de P por:

$$z_1 = (p x_1^2 + 2r x_1 y_1 + q y_1^2) / 2 = P(x_1, y_1)$$

siendo:

$$p = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \quad q = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2} \quad r = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial y_1} \quad (A3.7)$$

Así pues, por geometría diferencial [29], las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  en el punto P, o curvaturas de las secciones normales en dicho punto, cuyo valor absoluto es máximo o mínimo, deben ser soluciones del determinante:

$$\begin{vmatrix} p - k & r \\ r & q - k \end{vmatrix} = 0$$

es decir:

$$k_{1,2} = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4pq + 4r^2}}{2} \quad (A3.8)$$

y las tangentes principales de direcciones unitarias  $\alpha_1, \alpha_2$ , que corresponden a las secciones rectas de las curvaturas principales, son soluciones de la ecuación:

$$\left( \begin{pmatrix} p - k_i & r \\ r & q - k_i \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{-r}{\sqrt{(p-k_1)^2 + r^2}} & \alpha_{12} &= \frac{p-k_1}{\sqrt{(p-k_1)^2 + r^2}} \\ \alpha_{21} &= \frac{-(q-k_2)}{\sqrt{(q-k_2)^2 + r^2}} & \alpha_{22} &= \frac{r}{\sqrt{(q-k_2)^2 + r^2}} \end{aligned} \quad (A3.9)$$

luego las direcciones principales en el sistema de coordenadas glo  
bal se obtienen a partir de las soluciones:

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_{11} \bar{x}_1 + \alpha_{12} \bar{y}_1$$

$$\bar{\alpha}_2 = \alpha_{21} \bar{x}_1 + \alpha_{22} \bar{y}_1$$

siendo  $\bar{x}_1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31})$  e  $\bar{y}_1 = (b_{12}, b_{22}, b_{32})$

con  $\bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\alpha}_2 = \bar{n}$  (normal positiva)

Por tanto, a través de las relaciones (A3.5), (A3.6), (A3.7)  
(A3.8) y (A3.9) obtendremos las curvaturas y direcciones principa-  
les de la superficie en el punto P, si se conoce el valor de la  
función y de sus derivadas, en dicho punto, en el sistema  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ .

En el caso particular de superficies de revolución

$$r = 0, k_1 = q, k_2 = p, \alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = 1, \alpha_{21} = -1, \alpha_{22} = 0$$

obteniéndose como componentes de las direcciones principales

$$\alpha_{1x} = \frac{n_y}{d} \quad \alpha_{1y} = -\frac{n_x}{d} \quad \alpha_{1z} = 0$$

$$\alpha_{2x} = \frac{n_x n_z}{d} \quad \alpha_{2y} = \frac{n_y n_z}{d} \quad \alpha_{2z} = -d$$

siendo  $d = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$

### AIII.2.- DETERMINACION DE PUNTOS DE REFLEXION EN SUPERFICIES CONDUCTORAS DE LA FORMA $z=f(x,y)$ .

Este problema ha sido abordado en las referencias [30] y [31] pero considerando únicamente superficies convexas [30] o de revolución [31].

En este apartado, el problema queda resuelto para cualquier superficie dada analíticamente por la ecuación  $z=f(x,y)$  y cuya curvatura sea continuamente positiva o negativa en la región donde se prospecciona la solución [32].

El algoritmo descrito es también válido para superficies dadas por un conjunto de valores puntuales discretos.

#### AIII.2.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONDICIONES QUE DEBE CUMPLIR LA SOLUCION.

Supongamos un manantial M, una superficie reflectora S dada analíticamente por la ecuación  $z=f(x,y)$  y una dirección de salida prefijada para el rayo reflejado, dado por el correspondiente vector unitario  $\bar{U}_R$  (Fig. AIII.2).

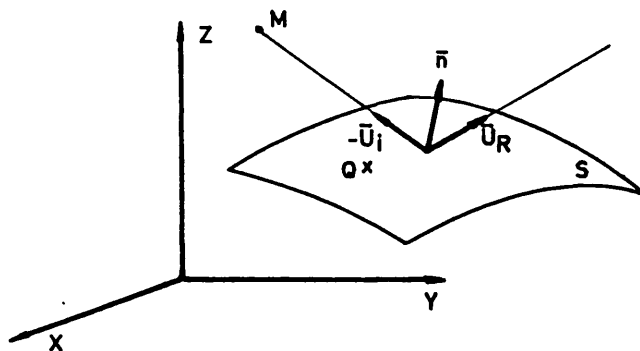


Fig. AIII.2 - Reflexión en una superficie

Un punto genérico  $Q$  de  $S$  define en relación con el manantial una dirección de incidencia, cuyo vector unitario será  $\bar{U}_i$ . En consecuencia, a dicho punto  $Q$  se le podrá asociar el vector

$$\bar{A}_Q = \bar{U}_i - \bar{U}_r \quad (\text{A3.10})$$

donde  $U_r$  se supondrá siempre constante y  $U_i$  dependerá directamente del punto  $Q$ .

Cuando  $Q$  coincida con el punto de reflexión  $R$ , su vector asociado  $\bar{A}_Q$ , por las conocidas particularidades de la reflexión, será paralelo a la normal  $\bar{n}$  a la superficie en el punto  $R$ .

En estas condiciones, la proyección de  $\Lambda_Q$  sobre el plano tangente a  $S$  en  $Q$  será nula. Pero esa proyección viene definida por:

$$\bar{A}_{QT} = -\bar{n}_Q \times (\bar{n}_Q \times \bar{A}_Q) \quad (\text{A3.11})$$

siendo  $\bar{n}_Q$  la normal a  $S$  en  $Q$ :

$$\bar{n}_Q = \pm \frac{f'_x}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}} \bar{i} \pm \frac{f'_y}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}} \bar{j} \pm \frac{f'_z}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}} \bar{k}$$

donde  $f'_x$  y  $f'_y$  son las derivadas parciales de  $z=f(x,y)$  respecto de  $x$  e  $y$ ;  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  son los vectores unitarios correspondientes a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; el doble signo indica si la normal se dirige hacia uno u otro lado de la superficie.

Si se desarrolla (A3.11) se obtienen las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de  $\Lambda_{QT}$ :

$$\begin{aligned} A_{Tx} &= [A_1(f_y^2 + 1) - A_2 f_x f_y + A_3 f_x] / D^2 \\ A_{Ty} &= [A_2(f_x^2 + 1) - A_1 f_x f_y + A_3 f_y] / D^2 \\ A_{Tz} &= [A_3(f_x^2 + f_y^2) + A_1 f_x + A_2 f_y] / D^2 \end{aligned} \quad (A3.12)$$

con  $D^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$

siendo  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  las componentes x, y, z del vector  $A_Q$ .

En el punto de reflexión R, las tres componentes de  $A_{QT}$  deben anularse; sin embargo, puede comprobarse fácilmente que

$$A_{Tz} = A_{Tx} f_x + A_{Ty} f_y$$

por consiguiente, si se anulan simultáneamente  $A_{Tx}$  y  $A_{Ty}$  también lo hará  $A_{Tz}$ .

Por lo tanto, el algoritmo buscado exigirá únicamente la anulación de las dos primeras componentes de  $A_{TQ}$  como control de estar o no sobre el punto K.

#### AIII.2.2.- MECANISMO DE APROXIMACION AL PUNTO DE REFLEXION A PARTIR DE UN PUNTO GENERICO Q DE LA SUPERFICIE.

Es obvio que para resolver el problema planteado es necesario desarrollar un procedimiento que permita "ir" lo más rápidamente posible desde un punto cualquiera Q de la superficie al punto que cumpla las condiciones expuestas anteriormente; es decir, al punto de reflexión R.

Este procedimiento se basa en una propiedad que puede enunciarse de dos formas diferentes:

- 1ª) Cualquiera que sea el punto al que se ha llegado a lo largo de dicho proceso, el vector  $A_{QT}$ , correspondiente al mencionado punto, se dirige siempre hacia el centro de reflexión buscado.
- 2ª) El parámetro de control,  $\mu_Q$ , definido como el ángulo que forman los vectores  $A_{QT}$  y  $-A_Q$ , viene dado por:

$$\mu_Q = \pi/2 \pm (\alpha_Q + \beta_Q/2) \quad (A3.13)$$

donde  $\alpha_Q$  es el ángulo que forman los normales a la superficie en el punto Q y en el punto de reflexión R y  $\beta_Q$  es el ángulo que forman las direcciones incidentes desde el manantial M a los puntos Q y R respectivamente.

Esta propiedad será analizada con cierto detalle en los dos casos que pueden presentarse, según que la superficie S sea convexa o cóncava vista desde el manantial M.

#### AIII.2.2.1.- La superficie reflectora es convexa respecto al manantial.

Este es el caso recogido en la figura AIII.3, donde por sencillez, el problema se ha supuesto bidimensional. Obsérvese que, en dicha figura, se han hecho tres construcciones, en las que como se indicó al principio de este Apéndice-  $\bar{U}_r$  es constante y  $\bar{U}_1$  variable. Las tres situaciones consideradas corresponden: la primera (punto  $R_1$ ), al caso en que  $\mu_1 > \pi/2$ ; la segunda (punto  $R_2$ ) al de  $\mu_2 < \pi/2$ ; mientras que, en la tercera (punto de reflexión R),  $\mu = \pi/2$ .



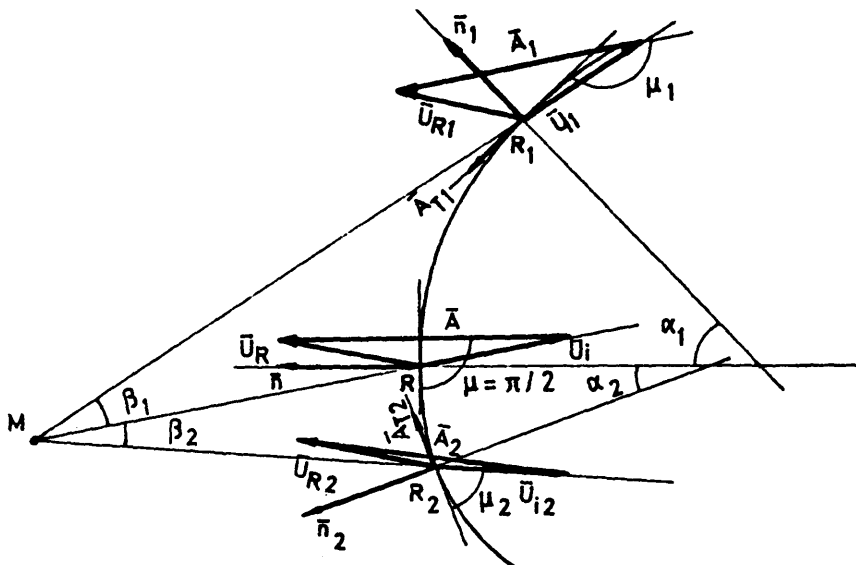


Fig. AIII.3 - Reflexión en superficie convexa, manteniendo fija la dirección de salida y la posición del manantial

Para ver la relación (A3.13) que existe entre  $\mu_1$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  se partirá de la figura AIII.4 en la que se comparan las situaciones primera y tercera (puntos  $R_1$  y  $R$ ). En dicha figura puede verse que  $\mu_1$  queda determinado como uno de los ángulos del triángulo  $R_1 B_1 C_1$  (donde  $R_1 C_1 = U_{i1}$ ). Si  $\eta$  y  $\delta$  son los otros dos:

$$\mu = \pi - (\eta + \delta) \quad (A3.14)$$

Por otra parte, la recta  $OR_1$  (normal a  $S$  en  $R_1$ ) es perpendicular a la  $DR_1$  (tangente a  $S$  en  $R_1$ ); por consiguiente:

$$\pi/2 = \alpha_1 + \zeta + \eta \quad (A3.15)$$

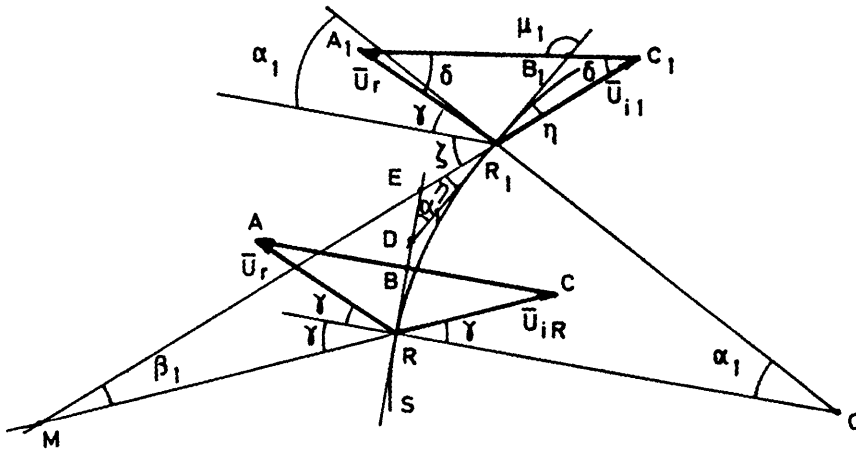


Fig. AIII.4 - Variables utilizadas en el establecimiento de la relación existente entre  $\mu_1$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ .

Pero el ángulo  $MR_1A_1 = \zeta + \gamma$  es exterior al triángulo isósceles  $R_1A_1C_1$ , cuyos ángulos interiores no adyacentes a él son ambos iguales a  $\delta$ ; por lo tanto:

$$\zeta + \gamma = 2\delta \quad (A3.16)$$

Además, en el triángulo MRE, los tres ángulos son:

$$\hat{M} = \beta_1; \quad \hat{R} = \pi/2 + \gamma; \quad \hat{E} = \alpha_1 + \eta$$

por lo que:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma + \eta = \pi/2 \quad (A3.17)$$

en estas condiciones, se elimina  $\zeta$  entre (A3.15) y (A3.16), obteniéndose:

$$\alpha_1 + 2\delta - \gamma + \eta = \pi/2$$

que, sumada a (A3.17), conduce a

$$\eta + \delta = \pi / 2 - (\alpha_1 + \beta_1 / 2)$$

Finalmente, sustituyendo esta última en (A3.14) se deduce:

$$\mu_1 = \pi / 2 + (\alpha_1 + \beta_1 / 2)$$

Como  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  se han tomado en valor absoluto, es evidente que  $\mu_1 > \pi/2$ , lo que indica que el vector  $\Lambda_{T1} \equiv C_1 \Lambda_1$  (véase la figura) "converge" hacia la normal, lo cual es equivalente a decir que apunta hacia R.

Si este proceso se hubiera repetido para la situación segunda, se habría obtenido:

$$\mu_2 = \pi / 2 - (\alpha_2 + \beta_2 / 2)$$

de donde  $\mu_2 < \pi/2$ , con lo que el vector  $\Lambda_{T2}$  "divergería" de la normal, apuntando de nuevo hacia R.

Esta propiedad puede emplearse para elaborar un procedimiento de convergencia en la búsqueda de la solución.

En efecto, eligiendo un punto cualquiera de la proyección de S sobre el plano XY y aplicando (A3.12) se deducirá el vector  $\Lambda_T$  de manera que el valor absoluto de las componentes x e y de  $\Lambda_T$  disminuirá a medida que lo haga la distancia entre éste y el punto de prueba.

Entonces, a partir del punto  $(x_0, y_0)$  y de las proyecciones  $\Lambda_{Tx_0}$ ,  $\Lambda_{Ty_0}$  se obtiene otro punto:

$$x_1 = x_0 + \Lambda_{Tx_0}$$

$$y_1 = y_0 + \Lambda_{Ty_0}$$

más próximo a R que el anterior. Repitiendo el proceso sucesivamente se obtiene el punto de reflexión con un error menor a la cota prefijada.

Este procedimiento presenta una convergencia excesivamente lenta. Para aumentarla se calcula el vector unitario en la dirección de acercamiento multiplicado por el radio de exploración de la superficie R y por un factor S comprendido entre 0.5 y 1. El vector que resulta de esa manipulación es el que sustituye a  $A_T$  en el tratamiento anterior. Cuanto mayor sea s, mayor es la precisión del método, pero menor su rapidez. Para valores comprendidos entre 0.75 y 0.85, se consigue determinar el punto de reflexión con un error menor que  $10^{-4}$  en un tiempo inferior a 100 ms.

La serie empleada será pues:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + \frac{A_{Tx}}{|A_T|} R S \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{A_{Ty}}{|A_T|} R S \end{aligned} \quad (A3.18)$$

#### AIII.2.2.2.- La superficie reflectora es cóncava respecto al manantial.

Este caso viene representado por la fig. A1.4 y como en el anterior podría demostrarse

$$\mu_i = \pi/2 \pm (\alpha_i - \beta_i / 2) \quad (A3.19)$$

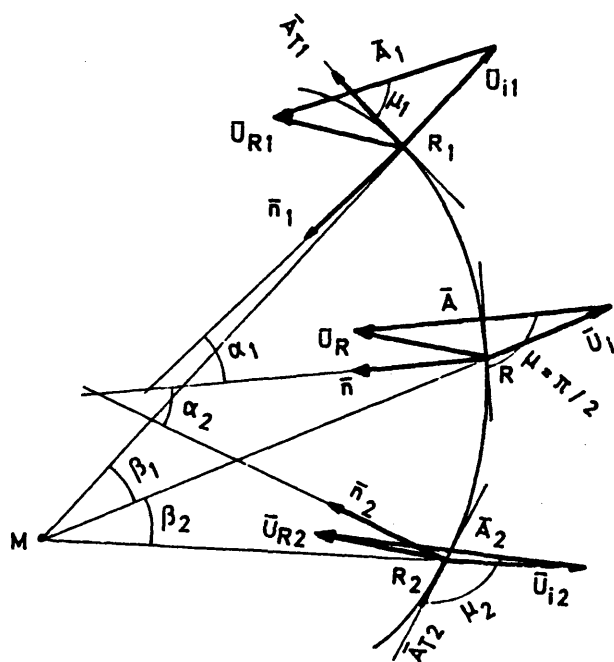


Fig. AIII.5- Reflexión en superficie cóncava, manteniendo fija la dirección de salida y la posición del manantial.

Sin embargo, no siempre el vector  $\vec{A}_T$  está dirigido ahora hacia el punto de reflexión; sólo cuando  $\alpha_i$  sea menor que  $\beta_i/2$ . Por el contrario, cuando  $\alpha_i$  sea mayor que  $\beta_i/2$ ,  $\vec{A}_T$  apunta en sentido contrario.

Esta circunstancia obliga a modificar ligeramente al algoritmo para este caso. En efecto, bastará sumar o restar el término correspondiente según  $\alpha_i$  sea mayor o menor que  $\beta_i/2$ .

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} \pm \frac{A_{Tx}}{|A_T|} RS & + \text{ para } \alpha_i > \beta_i / 2 \\ y_i &= y_{i-1} \pm \frac{A_{Ty}}{|A_T|} RS & - \text{ para } \alpha_i < \beta_i / 2 \end{aligned}$$

Ahora bien, en la mayoría de los problemas que se presentan prácticamente la curvatura es relativamente pequeña, por lo que  $\alpha_i$  será habitualmente inferior a  $\beta_i/2$ . En consecuencia, puede servir como regla práctica (aunque no siempre válida) el tomar la suma para las superficies convexas y la diferencia para las cóncavas.

Hay que indicar además que en el caso de superficies cóncavas puede existir más de una solución, pues es obvio que el paréntesis de (A3.19) puede anularse bien porque lo hacen  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , bien porque se verifica

$$\alpha_i = \beta_i / 2$$

Esta duplicidad exige subdividir convenientemente la zona de búsqueda partiendo de puntos  $(x_0, y_0)$  distintos.

Para superficies de gran curvatura, para las que se verifique

$$\alpha_i > \beta_i / 2$$

debe recurrirse a un referencial ligado a la normal a la superficie, controlando las componentes tangenciales de  $A_T$  de modo que sean menores a la cota preestablecida.

### AIII.3.- DETERMINACION DE LOS PUNTOS DE DOBLE DIFRACCION

Para poder determinar el campo electromagnético emergente después de una doble difracción es necesario conocer los puntos de las dos líneas en que se efectúan dichas difracciones.

Debido a la dificultad de abordar el caso general de dos líneas alabeadas cualesquiera y a que la mayoría de los casos prácticos que se presentan en la realidad contienen rectas y circunferencias, solo se han tratado elementos de este tipo.

#### AIII.3.1.- CASO DE DOS RECTAS CUALESQUIERA EN EL ESPACIO

Supongamos dos rectas  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  que se cruzan en el espacio, determinadas por cuatro puntos conocidos A, B, C y D; un manantial puntual M y una dirección de salida  $\vec{s}$  del rayo difractado sucesivamente en las dos rectas y que proviene del manantial.

El problema consiste en calcular los puntos de difracción  $D_1$  y  $D_2$  sobre su recta respectiva. Todo esto está esquematizado en la figura AIII.6.

Para resolverlo creamos un sistema de ejes trirrectangular que llamaremos sistema  $\underline{v}$  y que, en un sistema absoluto  $x, y, z$ , viene expresado en la forma:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{\overline{A-B}}{|\overline{A-B}|} \\ \vec{v}_2 &= \frac{\vec{v}_1 \times \vec{s}}{|\vec{v}_1 \times \vec{s}|} \\ \vec{v}_3 &= \vec{v}_1 \times \vec{v}_2\end{aligned}$$

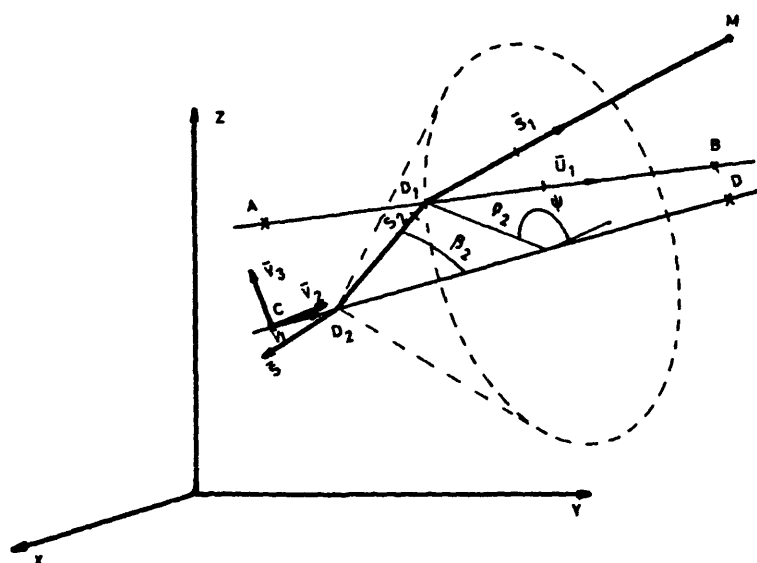


Fig. AIII.6 - Esquema del caso de doble difracción de dos rectas que se cruzan en el espacio.

siendo:

$\bar{v}_1$  = vector unitario de la segunda recta difractora,

$\bar{v}_2$  = vector unitario perpendicular a  $\bar{v}_1$  y a la dirección de salida en la segunda difracción y

$\bar{v}_3$  = vector unitario perpendicular a  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$

El vector  $\overline{D_2 D_1}$  es una de las generatrices del cono de Keller con vértice en  $D_2$  y semiángulo  $\beta_2$  determinado por la dirección de salida y la segunda recta difractora;  $\rho$  es la distancia entre  $D_1$  y la mencionada recta y  $\psi$  el ángulo que forma la dirección de  $\rho$  con el eje  $v_2$ ;  $t_1$  y  $t_2$  son las distancias sobre las rectas difractoras de los puntos A y C al de difracción respectivo.



De la figura AIII.6 se obtiene fácilmente la condición vectorial que debe cumplirse cuando se supone que el problema está resuelto y cuya expresión es:

$$\overline{CA} + \overline{AD}_1 = \overline{CD}_2 + \overline{D_2D_1}$$

siendo sus proyecciones sobre el sistema  $\underline{v}$

$$x_A + t_1 \alpha = x_2 + \rho_2 \cos \psi$$

$$y_A + t_1 \beta = y_2 + \rho_2 \sin \psi \quad (A3.20)$$

$$z_A + t_1 \gamma = z_2 + \frac{\rho_2}{\operatorname{tg} \beta_2}$$

donde  $x_A$ ,  $y_A$  y  $z_A$  son las coordenadas de A respecto del sistema  $\underline{v}$ ;

$x_2$ ,  $y_2$  y  $z_2$  son las coordenadas de  $D_2$  respecto del sistema  $\underline{v}$ , el cual a causa de su elección, se transforma en  $x_2=0$ ,  $y_2=0$  y  $z_2=t_2$ , y

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  son los cosenos directores de la recta  $\overline{AB}$  respecto del sistema  $\underline{v}$ .

Despejando  $\rho_2^2$  de las dos primeras ecuaciones de (A3.20) y sustituyendo en la tercera se obtiene:

$$(x_A + \alpha t_1)^2 + (y_A + \beta t_1)^2 = (z_A + \gamma t_1 - t_2)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_2$$

con

$$0 \leq t_1 \leq |B - A|$$

$$0 \leq t_2 \leq |D - C|$$

de la que se deduce el valor de  $t_1$  en función de  $t_2$

$$t_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (A3.21)$$

en la que

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \beta_2 \\ B &= x_A \alpha + y_A \beta - (z_A - t_2) \gamma \operatorname{tg}^2 \beta_2 \\ C &= x_A^2 + y_A^2 - (z_A - t_2)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_2 \end{aligned}$$

y

$$B^2 - AC \geq 0$$

para que exista solución real.

En el caso singular de dirección de salida normal a  $\bar{v}_1$  se obtiene:

$$t_1 = (t_2 - Z_1) / \gamma$$

$$\text{ya que } \beta_2 = \pi/2 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \infty$$

Otra condición que se debe cumplir es:

$$\bar{S}_1 \cdot \bar{U}_1 + \bar{S}_2 \cdot \bar{U}_1 = 0 \quad (A3.22)$$

donde  $\bar{S}_1$  es el vector unitario de la dirección  $\overline{D_1 M}$ ;  $\bar{S}_2$  el de la dirección  $\overline{D_1 D_2}$  y  $\bar{U}_1$  el de la  $\overline{AB}$ .

Las expresiones (A3.21) y (A3.22) determinan la solución al problema propuesto, pero el desarrollo analítico correspondiente resulta complicado. Debido a la complejidad de este tratamiento es preferible abordar la solución numérica dando valores al parámetro  $t_2$  (lo que equivale a ir desplazando el punto  $D_2$  sobre la segunda

recta difractora), calculando el valor respectivo de  $t_1$  mediante (A3.21) e imponiendo la condición (A3.22). Aplicando este proceso de forma iterativa se llega rápidamente al resultado buscado.

El programa de cálculo que realiza esta tarea necesita como datos de entrada las coordenadas de los cuatro puntos que determinan las dos rectas difractoras, las coordenadas del manantial y los cosenos directores de la dirección de salida.

### AIII.3.2.- CASO DE RECTA-CIRCUNFERENCIA

El tratamiento de este caso lo hacemos de tal forma que, elegidos convenientemente los sistemas de coordenadas, se nos reduzca al caso anterior, lo cual puede apreciarse en la figura AIII.7, en la que volvemos a encontrarnos la doble difracción en dos rectas pero tomando la segunda recta difractora como la tangente a la circunferencia.

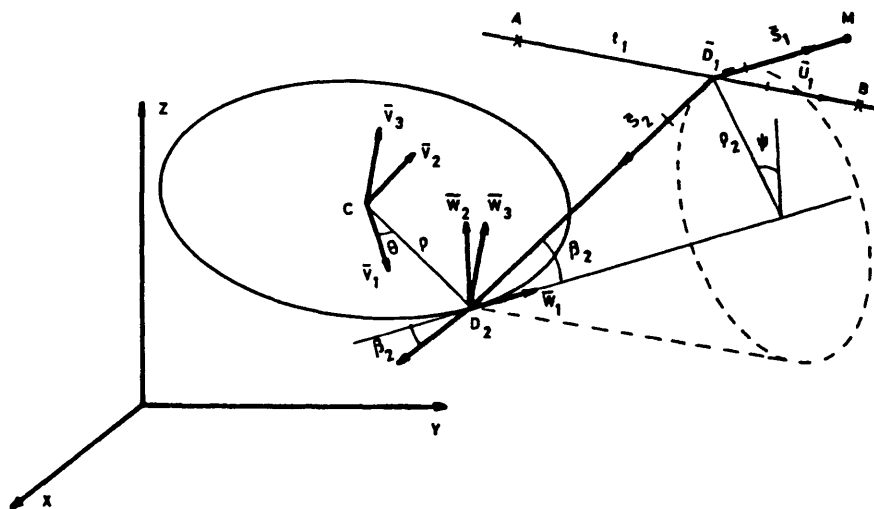


Fig. AIII.7- Esquema del caso de doble difracción en recta-circunferencia.

Aquí, el desplazamiento del punto de difracción no va a efectuarse a lo largo de una recta, sino que va a estar ligado a la rotación sobre la mencionada circunferencia.

Los datos de partida son: coordenadas del centro de la circunferencia C, radio  $\rho$  y vector unitario normal a su plano  $\bar{n}$ ; coordenadas del manantial M y dirección de salida  $\bar{s}$  del rayo resultante en la segunda difracción.

El sistema de coordenadas  $\underline{v}$  lo elegimos de tal forma que  $\bar{v}_3$  sea idéntico a  $\bar{n}$ ,  $\bar{v}_2$  normal a  $\bar{s}$  y  $\bar{v}_3$ ,  $\bar{v}_2$  normal a  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_3$  y el origen coincidente con el centro de la circunferencia.

$$\bar{v}_3 = \bar{n}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{s} \times \bar{v}_3}{|\bar{s} \times \bar{v}_3|}$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \times \bar{v}_3$$

En el presente caso es conveniente definir un sistema de ejes  $\underline{w}$  que utilizaremos para facilitar la obtención de las proyecciones sobre el sistema  $\underline{v}$ . Dicho sistema lo definimos de la siguiente manera:

$$\bar{w}_1 = \cos\theta \bar{v}_1 + \sin\theta \bar{v}_2$$

$$\bar{w}_2 = -\sin\theta \bar{v}_1 + \cos\theta \bar{v}_2$$

$$\bar{w}_3 = \bar{v}_3$$

La ecuación vectorial que determina la solución es:

$$\overline{D_2A} + \overline{AD_1} = \overline{D_2D_1}$$

que proyectada sobre el sistema  $\underline{v}$  a través del  $\underline{w}$  da:

$$\begin{aligned} X_A - X_2 + \alpha t_1 &= \frac{\rho_2}{\operatorname{tg} \beta_2} \cos \theta - \rho_2 \cos \psi \operatorname{sen} \theta \\ Y_A - Y_2 + \beta t_1 &= \frac{\rho_2}{\operatorname{tg} \beta_2} \operatorname{sen} \theta + \rho_2 \cos \psi \cos \theta \\ Z_A - Z_2 + \gamma t_1 &= \rho_2 \operatorname{sen} \psi \end{aligned} \quad (A3.23)$$

donde  $x_A, y_A, z_A; x_2, y_2, z_2$  y  $\alpha, \beta, \gamma$  son las componentes de los puntos A y D<sub>2</sub> y los cosenos directores de la recta  $\bar{u}_1$  respectivamente, en el sistema  $\underline{v}$ ;  $\rho_2$  la distancia entre el punto D<sub>1</sub> y la recta  $\bar{w}_1$ ;  $\psi$  el ángulo que forma la dirección de  $\rho_2$  y  $\bar{w}_2$ ;  $\theta$  el ángulo que forman  $\bar{w}_1$  y  $\bar{v}_1$  y, por último,  $\beta_2$  el ángulo existente entre la dirección de salida y la recta  $\bar{w}_1$ .

Restando a la segunda ecuación de (A3.23) multiplicada por  $\cos \theta$  la primera multiplicada por  $\operatorname{sen} \theta$ , queda:

$$\rho_2 \cos \psi = -(X_A - X_2) \operatorname{sen} \theta + (Y_A - Y_2) \cos \theta - (\alpha \operatorname{sen} \theta - \beta \cos \theta) t_1 \quad (A3.24)$$

Sumando a la primera de (A3.23) multiplicada por  $\cos \theta$  la segunda multiplicada por  $\operatorname{sen} \theta$ , se obtiene:

$$\frac{\rho_2}{\operatorname{tg} \beta_2} = (X_A - X_2) \cos \theta + (Y_A - Y_2) \operatorname{sen} \theta + (\alpha \cos \theta + \beta \operatorname{sen} \theta) t_1 \quad (A3.25)$$

y eliminando  $\psi$  entre (A3.24) y la tercera de (A3.23), queda:

$$\begin{aligned} \rho_2^2 &= (X_A - X_2)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (Y_A - Y_2)^2 \cos^2 \theta + (Z_A - Z_2)^2 - 2(X_A - X_2)(Y_A - Y_2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \\ &+ 2\{[(X_A - X_2) \operatorname{sen} \theta + (Y_A - Y_2) \cos \theta](\alpha \operatorname{sen} \theta - \beta \cos \theta) + (Z_A - Z_2) \gamma\} t_1 + \\ &+ [(\alpha \operatorname{sen} \theta - \beta \cos \theta)^2 + \gamma^2] t_1^2 \end{aligned}$$

Si eliminamos  $\rho_2$  entre esta última ecuación y la (A3.25) se obtiene:

$$A t_1^2 + 2B t_1 + C = 0 \quad (A3.26)$$

con

$$A = (\alpha \operatorname{sen} \theta - \beta \cos \theta)^2 + \gamma^2 - (\alpha \cos \theta + \beta \operatorname{sen} \theta)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_2$$

$$B = [(X_A - X_2) \operatorname{sen} \theta + (Y_A - Y_2) \cos \theta] (\alpha \operatorname{sen} \theta - \beta \cos \theta) + (Z_A - Z_2) \gamma - \\ [(X_A - X_2) \cos \theta + (Y_A - Y_2) \operatorname{sen} \theta] (\alpha \cos \theta + \beta \operatorname{sen} \theta) \operatorname{tg}^2 \beta_2$$

$$C = (X_A - X_2)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (Y_A - Y_2)^2 \cos^2 \theta + (Z_A - Z_2)^2 - 2(X_A - X_2)(Y_A - Y_2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \\ [(X_A - X_2)^2 \cos^2 \theta + (Y_A - Y_2)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2(X_A - X_2)(Y_A - Y_2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta] \operatorname{tg}^2 \beta_2$$

La ecuación (A3.26) que liga  $t_1$  con el parámetro  $\theta$ , junto con la condición

$$\bar{S}_1 \cdot \bar{U}_1 + \bar{S}_2 \cdot \bar{U}_1 = 0 \quad (A3.27)$$

determina el procedimiento a seguir para calcular los puntos de di fracción  $D_1$  y  $D_2$ .

Como todos los elementos de  $A$ ,  $B$  y  $C$  son conocidos en función de  $\theta$ , incluidas las coordenadas de  $D_2$  que son de forma explícita:

$$X_2 = \rho \operatorname{sen} \theta$$

$$Y_2 = \rho \cos \theta$$

$$Z_2 = 0$$

podemos variar el parámetro  $\theta$  entre 0 y  $360^\circ$  y controlar la condición (A3.27) hasta que esta se verifique.

#### AIII.3.3.- CASO DE CIRCUNFERENCIA-RECTA

Al igual que en el caso anterior elegimos unos sistemas de ejes de tal forma que el problema pueda resolverse como una extensión del caso de doble difracción en dos rectas. En la figura AIII.8 se ha representado el esquema correspondiente del camino seguido por el rayo doblemente difractado.

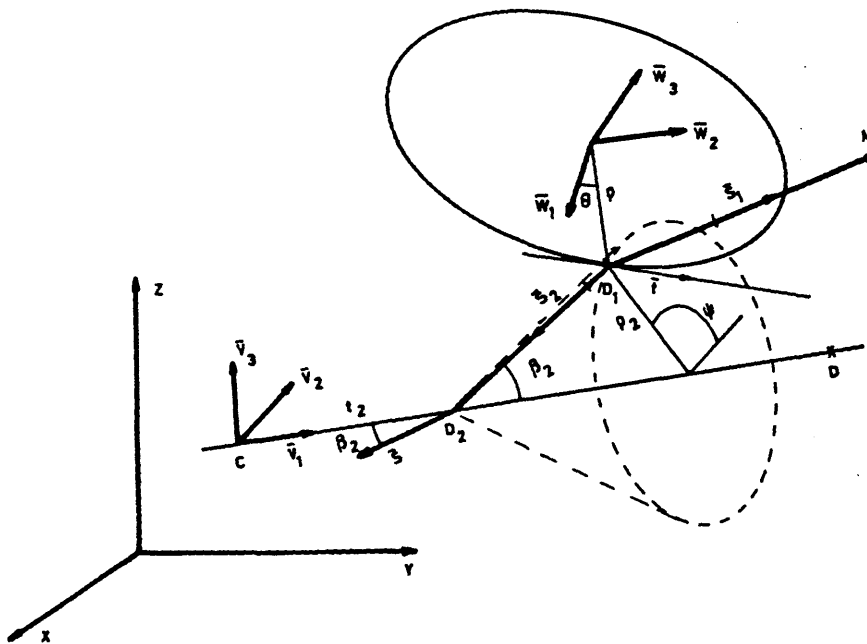


Fig. AIII.8 - Esquema del caso de doble difracción en circunferencia-recta.

El rayo que parte del manantial M se difracta en el punto  $D_1$  del borde de la circunferencia de tal forma que su trayectoria forma un ángulo  $\beta_1$  con la tangente  $\bar{t}$  en  $D_1$ , igual al formado por dicha tangente y el rayo difractado. En la segunda difracción se conserva el ángulo de incidencia y de difracción  $\beta_2$ .

Los datos del problema lo constituyen las coordenadas del manantial M, el centro de la circunferencia A, su radio  $\rho$  y la normal a su plano; las coordenadas de los puntos C y D que determinan la recta difractora y los cosenos directores de la dirección de salida  $\bar{s}$  de la segunda difracción.

El sistema  $\underline{v}$  lo definimos como:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \frac{\overline{CD}}{|\overline{CD}|} \\ \bar{v}_2 &= \frac{\bar{s} \times \bar{v}_1}{|\bar{s} \times \bar{v}_1|} \\ \bar{v}_3 &= \bar{v}_1 \times \bar{v}_2\end{aligned}$$

mientras que el  $\underline{w}$ , lo ligamos a la circunferencia de centro A.

$$\begin{aligned}\bar{w}_3 &= \bar{n} \\ \bar{w}_2 &= \frac{\bar{n} \times \overline{AM}}{|\overline{AM}|} \\ \bar{w}_1 &= \bar{w}_3 \times \bar{w}_2\end{aligned}$$

La ecuación vectorial correspondiente es:

$$\overline{D_2 D_1} = \overline{D_2 A} + \overline{A D_1}$$



que proyectada sobre el sistema  $\underline{v}$ , con ayuda del  $\underline{w}$ , da:

$$\rho_2 \cos \psi = (x_A - x_2) + \rho \cos \theta \alpha_1 + \rho \operatorname{sen} \theta \alpha_2$$

$$\rho_2 \operatorname{sen} \psi = (y_A - y_2) + \rho \cos \theta \beta_1 + \rho \operatorname{sen} \theta \beta_2$$

$$\frac{\rho_2}{\operatorname{tg} \beta_2} = (z_A - z_2) + \rho \cos \theta \gamma_1 + \rho \operatorname{sen} \theta \gamma_2$$

donde  $x_A, y_A, z_A; x_2, y_2, z_2$  son las coordenadas de los puntos A y D<sub>2</sub>;  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  son los cosenos directores de  $\bar{w}_1$  y  $\bar{w}_2$  en el sistema  $\bar{v}$ , respectivamente.

Eliminando  $\rho_2$  y  $\psi$  entre estas tres ecuaciones y considerando que

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 0; \quad z_2 = t_2$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en  $t_2$

$$A t_2^2 + 2 B t_2 + C = 0 \quad (A3.28)$$

donde

$$A = -\operatorname{tg}^2 \beta_2$$

$$B = 2\{\rho(\cos \theta \gamma_1 + \operatorname{sen} \theta \gamma_2) + z_A\} \operatorname{tg}^2 \beta_2$$

$$C = 2\rho[\cos \theta(x_A \alpha_1 + y_A \beta_1 - z_A \gamma_1 \operatorname{tg}^2 \beta_2) + \operatorname{sen} \theta(x_A \alpha_2 + y_A \beta_2 - z_A \gamma_2 \operatorname{tg}^2 \beta_2) + \rho \operatorname{sen} \theta \cos \theta(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{tg}^2 \beta_2)]$$

La ecuación (A3.28), junto con la condición

$$\bar{S}_1 \cdot \bar{t} + \bar{S}_2 \cdot \bar{t} = 0$$

nos permite la resolución del problema mediante un calculador, de forma análoga a los dos casos anteriores, con la consideración de que el parámetro a variar aquí es el ángulo  $\theta$  y el parámetro que se determina es el  $t_2$ .

## APENDICE AIV

### METODO DE LA FASE ESTACIONARIA

En la resolución de problemas de difracción electromagnética, planteados como radiación de distribuciones de fuentes de corrientes bidimensionales, surgen integrales del tipo:

$$I = \int_b^a f(x) \exp[jkg(x)] dx \quad (A4.1)$$

que, en alta frecuencia, pueden resolverse por el procedimiento conocido con el nombre de "metodo de la fase estacionaria" [11]. En realidad, el problema estriba en la resolución asintótica de integrales con uno o ambos extremos en el infinito. En efecto, la integral (AIV.1) puede ponerse en la forma:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[jkg(x)] dx = \int_a^{\infty} f(x) \exp[jkg(x)] dx - \int_{-\infty}^a f(x) \exp[jkg(x)] dx = \int_a^{\infty} f(x) \exp[jkg(x)] dx - \int_{-\infty}^a f(x) \exp[jkg(-x)] dx = I_0 - I_a - I_b \quad (A4.2)$$

#### AIV.1.- INTEGRALES CON AMBOS LIMITES EN EL INFINITO

Consideremos el caso de la integral  $I_0$ , que es la (A4.1) con ambos límites en el infinito y con  $g(x)$  real. Si  $k$  es grande y suponemos que la función  $f(x)$  varía lentamente y que la función de fase  $g(x)$  tiene un punto donde es estacionaria, es decir:

$$g'(x_0) = 0 \quad (A4.3)$$

entonces, el término exponencial de (A4.1) no variará rápidamente en las proximidades de dicho punto, y la mayor contribución a la integral  $I_0$  vendrá de los puntos donde se verifique (A4.3). Dichos puntos son conocidos por el nombre de "puntos de fase estacionaria".

Se dice que un punto de fase estacionaria es de primer orden si, además de (A4.3), se verifica:

$$g''(x_0) \neq 0$$

Así, suponiendo que existe un punto de fase estacionaria de primer orden en  $x=x_0$ , desarrollando la función de fase en serie de Taylor alrededor de dicho punto, se obtiene:

$$g(x) \approx g(x_0) + g''(x_0) \frac{s^2}{2} ; \quad s = x - x_0 \quad (\text{A4.4})$$

Si, además, en las proximidades de dicho punto la función  $f(x)$  se puede aproximar por su valor en  $x_0$ :

$$I_0 \approx f(x_0) \exp[jk g(x_0)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jk g''(x_0) \frac{s^2}{2}] ds$$

cuya integral puede escribirse como

$$2 \sqrt{\frac{2\pi}{k|g''(x_0)|}} \int_0^{\infty} \exp\{j t^2 \text{signo}[g''(x_0)]\} dt$$

y, teniendo en cuenta que la nueva integral que aparece es una integral de Fresnel de argumento nulo:

$$\mathcal{F}(0) = \int_0^{\infty} e^{\pm j t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \quad (\text{A4.5})$$

se obtiene:

$$I_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{k|g''(x_0)|}} f(x_0) \exp \left( j \left[ kg(x_0) + \frac{\pi}{4} \text{signo}\{g''(x_0)\} \right] \right) \quad (\text{A4.6})$$

Si existen varios puntos de fase estacionaria de primer orden,  $I_0$  será igual a la suma de las contribuciones, del tipo de (A4.6), de dichos puntos.

Si  $g''(x_0) \rightarrow 0$ , la ecuación (A4.6) falla y hay que considerar el término siguiente en el desarrollo asintótico de  $f(x)$  en (A4.4), con lo que:

$$I_0 = f(x_0) \exp[jkg(x_0)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ jk \left\{ g''(x_0) \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} g'''(x_0) \frac{s^3}{3} \right\} \right] ds \quad (\text{A4.7})$$

Considerando la función de Airy [28]:

$$A_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \pm j \left\{ xt + \frac{t^3}{3} \right\} \right] dt \quad (\text{A4.8})$$

y haciendo el cambio de variable

$$t = \left( \frac{1}{2} k |g''(x_0)| \right)^{1/3} \left( s + \frac{g'''(x_0)}{g''(x_0)} \right)$$

se obtiene:

$$I_0 = 2\pi f \exp(jkg) \exp \left\{ j \frac{k}{3} (g'')^3 (g''')^{-2} \right\} \left[ \frac{2}{k|g''|} \right]^{1/3} A_i(\xi) \Big|_{x=x_0} \quad (\text{A4.9})$$

siendo:

$$\zeta = \left(\frac{k}{2}\right)^{2/3} |g''|^2 |g''|^{-4/3} \exp(\mp j\pi) ; \quad g''(x_0) \gtrless 0$$

Los puntos para los que se verifica:

$$g''(x_0) = 0 ; \quad (\zeta = 0)$$

se denominan puntos de fase estacionaria de segundo orden. Estos pueden ser considerados como la confluencia de dos puntos próximos de fase estacionaria de primer orden.

#### AIV.2.- INTEGRALES CON UN LIMITE FINITO

Se trata de evaluar asintóticamente las integrales de (A4.2), de la forma:

$$I_\alpha = \int_\alpha^\infty f(x) \exp[jk g(x)] dx \quad (A4.10)$$

que tienen un límite en  $x = \alpha$ , y un punto de fase estacionaria en  $x = x_0$ , que puede estar lejos o cerca del punto extremo de la integral.

En el caso en que el punto de fase estacionaria esté situado lejos del punto extremo, en  $x = \alpha$ , el término fundamental en la evaluación asintótica de (A4.10) vendrá dado por  $I_0$  definido en el apartado anterior. El término siguiente será la contribución del punto extremo en  $x = \alpha$ . En efecto, escribiendo (A4.10) como

$$\frac{1}{jk} \int_\alpha^\infty \frac{f(x)}{g'(x)} jk g'(x) \exp[jk g(x)] dx$$

resolviendo por partes y teniendo en cuenta que

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\alpha \quad (A4.11)$$

$$I_{\alpha} \approx I_0 - \frac{1}{jk} \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)} \exp[jkg(\alpha)] \quad (A4.12)$$

donde se ha considerado sólo el primer término del desarrollo asintótico de la segunda integral de (A4.11). En dicho desarrollo, el término siguiente sería:

$$\frac{1}{(jk)^2} \frac{f'(\alpha)g'(\alpha) - f(\alpha)g''(\alpha)}{[g'(\alpha)]^3} \exp[jkg(\alpha)] \quad (A4.13)$$

En el caso en que el punto de fase estacionaria se sitúe cerca del punto extremo de la integral en  $x = \alpha$ , es necesario considerar el acoplo entre ambos puntos. Así, desarrollando en serie de Taylor  $g(\alpha)$  alrededor de  $x_0$  se obtiene:

$$g(x_0) - g(\alpha) \approx -\frac{1}{2}(\alpha - x_0)^2 g''(x_0)$$

y desarrollando  $g(x_0)$  alrededor de  $\alpha$ :

$$g(x_0) - g(\alpha) \approx -(\alpha - x_0)g'(\alpha)$$

con lo que, para  $x_0 \rightarrow \alpha$

$$g'(\alpha) \approx \frac{1}{2}(\alpha - x_0)g''(\alpha)$$

Así pues, desarrollando  $g(x)$  en serie de Taylor alrededor de  $\alpha$ , y con la información de signo de la última ecuación, se obtiene:

$$I_{\alpha} \approx H(-\epsilon_1) I_0 - f(\alpha) \exp[jkg(\alpha)] \int_{-\infty}^{\alpha} \exp\left[\pm jk\{\epsilon_1 s |g'(\alpha)| + \frac{s^2}{2} |g''(\alpha)|\}\right] ds$$

correspondiendo los signos  $\pm$  a  $g''(\alpha) \gtrless 0$ , respectivamente; siendo  $s = x - \alpha$ ,  $\epsilon_1 = \text{signo}(\alpha - x_0)$  y  $H(-\epsilon_1)$  la función de Heaviside en la que  $H(\alpha) = 1$  para  $\alpha \geq 0$  y 0 en el resto.

Haciendo el cambio de variable:

$$t = \epsilon_1 \sqrt{\frac{k}{2|g''(\alpha)|}} |g'(\alpha)| + \sqrt{\frac{k}{2} |g''(\alpha)|} s$$

se obtiene:

$$I_\alpha = H(-\epsilon_1) I_0 + \epsilon_1 f(\alpha) \exp[jk g(\alpha) \mp jv^2] \sqrt{\frac{2}{k|g''(\alpha)|}} \mathcal{F}_\pm(v) \quad (\text{A4.14})$$

siendo  $\epsilon_1 > 0$  ( $\epsilon_1 < 0$ ) cuando el punto de fase estacionaria está fuera (dentro) del intervalo de la integral de (A4.10) y  $\mathcal{F}(v)$  es la integral de Fresnel

$$\mathcal{F}_\pm(v) = \int_v^\infty \exp(\pm j t^2) dt \quad (\text{A4.15})$$

con:

$$v = \sqrt{\frac{k}{2|g''(\alpha)|}} |g'(\alpha)| \quad (\text{A4.16})$$



### BIBLIOGRAFIA

- [1] .- J. B. Keller. "Diffraction by an Aperture". J. App. Phys., vol. 28, nº 4, pp. 426-444.
- [2] .- J. B. Keller, R. M. Lewis and B. D. Seckler. "Diffraction by an Aperture II". J. App. Phys., vol. 28, nº 5, 1957, pp. 570-579.
- [3] .- J. B. Keller. "Geometrical Theory of Diffraction". J. Opt. Soc. Am., vol. 52, nº 2, 1962, pp. 116-130.
- [4] .- J. B. Keller. "The Geometric Optics Theory of Diffraction". Proc. Mc. Gill Symposium on Microwaves Optics p. II. Bedford Massachusetts, 1959, pp. 207-210.
- [5] .- J. B. Keller, R. M. Lewis and B. D. Seckler. "Asymptotic Solution of Some Diffraction Problems". Commun. Pure Appl. Math., vol. 9, 1956, pp. 207-256.
- [6] .- G. A. Deschamps. "Ray Techniques in Electromagnetics". Proc. IEEE, vol. 60, nº 9, 1972, pp. 1022-1035.
- [7] .- A. Sommerfeld and J. Runge. Ann. Phys., vol. 35, 1911, pp. 277-296.
- [8] .- A. Sommerfeld. "Optics". Acad. Press, Inc. New York, 1954.
- [9] .- R. K. Luneburg. "Mathematical Theory of Optics". Pub. Univ. of California Press, Berkeley, 1964.
- [10].- M. Kline. "An Asymptotic Solution of Maxwell Equations", in "The Theory of Electromagnetic waves". Ed. by Morris Kline, Dover Pub., Inc. New York, 1965, pp. 225-262.

- [11].- G. L. James. "Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic waves". P. Peregrinus Ltd. IEE, London, 1976.
- [12].- P. F. Combes. "Etude de la Zone de Rayleigh des Ouvertures Circulaires par les Formules de Kottler et la Theorie Geometrique de la Diffraction". Thèse de Docteur d'Etat. Univ. Paul Sabatier. Toulouse. 1978.
- [13].- H. M. Mac Donald. "A Class of Diffraction Problems". Proc. of the London Mathematical Society, 14, 1915, pp. 410-427.
- [14].- D. S. Jones. Quart. Mech. Appl. Math., 1950, 3, pp. 420.
- [15].- W. Pauli. "On Asymptotic Series for Functions in the Theory of Diffraction of Light". Phy. Rev., vol. 54, 1938, pp. 924-931.
- [16].- P. C. Clemmow. "Some Extensions to the Method of Integration by steepest descents". Quart. J. Mech. Math., vol. 3, 1950, pp. 241-256.
- [17].- R. G. Kouyoumjian. "Asymptotic High Frequency Methods". Proc. IEEE, ag. 1965, pp. 864-876.
- [18].- R. G. Kouyoumjian. "The Geometrical Theory of Diffraction and its Applications", in "Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics". Ed. by R. Mittra, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
- [19].- R. G. Kouyoumjian, P. H. Pathak. "A Uniform Theory of Diffraction for and Edge in a Perfectly Conducting Surface". Proc. IEEE, vol. 26, n° 11, 1974, pp. 1448-1461.
- [20].- R. F. Harrington. "Time Harmonic Electromagnetic Field". MacGraw Hill Book Company, Inc., New York, 1961.

- [21].- J. A. Stratton. "Electromagnetic Theory". MacGraw Hill Book Comp., New York, London, 1941.
- [22].- Abramowitz and Sugen. "Handbook of Mathematical Functions". Dover Public., Inc. New York.
- [23].- R. Mittra and Y. Rahmat-Samii. "Transform Approach to Electromagnetic Scattering". Proc. of the IEEE, nov. 1979, pp. 1486-1503.
- [24].- J. Boersma and Y. Rahmat-Samii. "Comparison of Two Leading Uniform Theories of Edge Diffraction with the Exac Uniform Asymtotic Solution". Radio Science, vol. 25, nº 6, 1980, pp. 1179-1194.
- [25].- J. A. Aas. "On the Accuracy of the Uniform Geometrical Theory of Diffraction Close to a 90° wedge". IEEE Trans. Ant. and Prop., vol. AP-27, nº 5, 1979, pp. 704-705.
- [26].- I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. "Table of Integrals, series and Products". Acad. Press, New York, London, 1965.
- [27].- Ch. E. Ryan and L. Peters. "Evaluation of Edge-Diffracted Fields Including Equivalent Currents for the Caustic Regions" IEEE Trans. Ant. and Prop., vol. AP-17, nº 3, 1969, pp. 292-299.
- [28].- B. Felsen and N. Marcuwitz. "Radiation and Scattering of waves". Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1973, pp. 421-423.
- [29].- P. Abellanas. "Geometría Básica". Ed. Romo S. L., Madrid, 1971.
- [30].- W. V. T. Rush, O. Sorenson. "On Determining if a Specular point exist". IEEE Trans. Ant. and Prop., vol. AP-27, 1979, January.

- [31].- S. W. Lee, P. W. Cramer. "Determination of Specular points on a Surface of Revolution". IEEE Trans. Ant. and Prop., vol. AP-29, July 1981.
- [32].- M. Martínez, R. Villar. "Determinación de los Puntos de Reflexión en superficies conductoras de la Forma  $z=f(x,y)$ , para Aplicaciones GTD". URSI, III Reunión Anual Comisión B, Santander, Sept. 1982.
- [33].- R. F. Harrington. "Fields Computation by Moment method". New York. McMillan, 1968.
- [34].- R. M. Lewis and J. Boersma. "Uniform Asymptotic Theory of Edge Diffraction". J. Phys., vol. 10, 1969, pp. 2291-2305.
- [35].- J. Boersma and S. W. Lee. "High-Frequency Diffraction of a Line-Source Field by a Half-Plane: Solution by Ray Techniques". IEEE Trans. Ant. and Prop., vol. AP-25, nº 2, March 1977, pp. 1771-1790.
- [36].- S. W. Lee and G. A. Deschamps. "A Uniform Asymptotic Theory of Electromagnetic Diffraction by a Curved Wedge". IEEE Trans. Ant and Prop., vol. AP-24, nº 1, pp. 25-34, January 1976.
- [37].- Y. M. Hwang and R. G. Kouyoumjian. "On the Dyadic Slope Diffraction Coefficient". Paper presented at the URSI Meeting. Urbana, Illinois, 1975.
- [38].- P. H. Pathak, W. D. Burnside and R. J. Marhefha. "A Uniform Analysis of the Diffraction of Electromagnetic Waves by a Smooth Convex Surface". IEEE Trans. Ant. and Prop., vol. AP-28, pp. 631-642, Sept. 1980.
- [39].- P. H. Pathak, N. Wang, W. D. Burnside and R. G. Kouyoumjian. "A Uniform GTD Solution for the Radiation From Sources on a Convex Surface". IEEE Trans. Ant. and Prop. vol. AP-29, pp. 609-622, 1981.

- [40].- R. Tiberio, F. Bessi, G. Manara and G. Pelosi. "Scattering by a Strip with Two Face Impedances at Edge on Incidence". Radio Science, vol. 17, pp. 1199-1210, 1982.
- [41].- C. Knop. "An Extension of Rush's Asymptotic Physical Optics Theory of a Parabolic Antenna". IEEE Trans. Ant. and Prop. vol. AP23, pp. 741-743, 1975.
- [42].- P. Ya. Ufimtsev. "Approximate Computation of the Diffraction of Plane Electromagnetic Waves at Certain Metal Bodies". Zh. Tekhn. Fiz. (USSR), vol. 27, n° 8, pp. 1708-1718, 1957.
- [43].- E. F. Knott and T. B. A. Senior. "Comparison of Tree High Frequency Diffraction Techniques". Proc. IEEE, vol. 62, n° 11, Nov. 1974.
- [44].- N. C. Albertsen, P. Balling, N. Jensen. "Caustic and Caustic Corrections to the field Diffracted by a Curved Edge". IEEE Trans. Ant. and Prop., vol. AP-25, n° 3, may 1977.
- [45].- J. S. Hollis, T. J. Lyon and L. Clayton. "Microwave Antenna Measurements". Scientific Atlanta, Georgia, USA, 1970.
- [46].- P. Balling. "The Finite Circular Cylinder Satellite Program". ESTEC Contract n° 2290/74HP, 1975.
- [47].- J. Torres y otros. "S Band Antenna". HIPPTNO/40001/INTA, 1983-84.

